Лекция 8

Раздел 3. Элементы теории пограничного слоя

§ 7. Уравнения пограничного слоя

7.1 Понятие о пограничном слое

Теория пограничного слоя, разработанная Л. Прандтлем, применяется при описании задач внешнего обтекания тел в случае больших чисел Рейнольдса, когда либо велика скорость течения, либо мала вязкость. Эта теория является приближенным методом описания данного класса задач, который выполняется тем точнее, чем больше число Рейнольдса. Она являет собой пример приближенной теории, которая для огромного класса практически важных задач позволяла формулировать их в достаточно простой форме, чтобы получать аналитические решения, и в то же время, несмотря на приближенный характер, дает возможность получать результаты с высокой точностью.

В п. 6.3 в случае течения в окрестности критической точки показано, что переход гидродинамических параметров потока от их значений на поверхности обтекаемого тела к значениям на бесконечности локализован в области, прилегающей к поверхности, причем поперечный размер этой области характеризуется параметром $\bar{\delta}$, который согласно (2.50):

$$\bar{\delta} \sim L\sqrt{\frac{1}{\mathrm{Re}}}\,. \tag{3.1}$$

Эта относительно тонкая зона течения, прилегающая к поверхности обтекаемого тела, называется пограничным слоем. Существование этого слоя вытекает из характера картины течения, в котором в ближайшей от обтекаемой поверхности области происходит 99% изменения скорости и только 1% изменения происходит за пределами этой области.

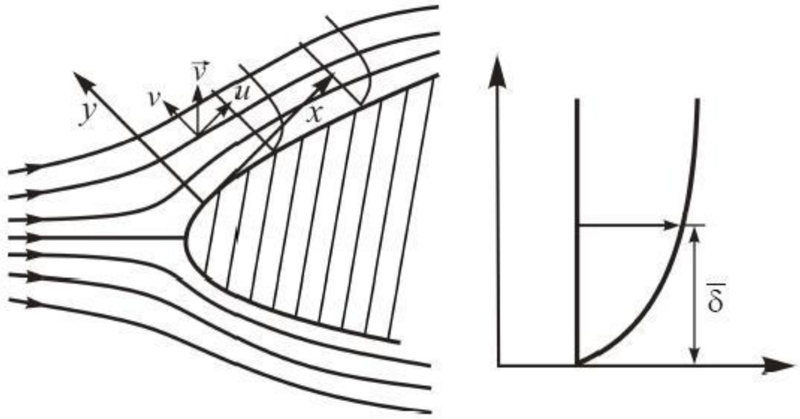

Рис. 3.1 − Качественная картина обтекания тела потоком и характерные профили скорости вблизи поверхности тела

На рис. 3.1 показана качественная картина обтекания тела потоком, где примерная граница области существенного изменения гидродинамических параметров заштрихована. Поскольку радиус искривления поверхности велик по сравнению с величиной $\overline{\delta}$, течение можно рассматривать в локальной системе координат и поверхность считать плоской.

Заметим, что вывод уравнений пограничного слоя – это упрощение системы уравнений гидродинамики с учетом малого параметра $\overline{\delta}$ или $\dfrac{1}{\mathrm{Re}}$.

7.2 Уравнения пограничного слоя Прандтля

Рассмотрим общую систему уравнений гидродинамики в локальной декартовой системе координат, в которой ось X лежит на обтекаемой поверхности, в безразмерном виде. Выберем характерный размер задачи L так, чтобы в интересующей нас области для безразмерных величин имело место соотношение $\dfrac{\partial u}{\partial x} \sim 1$, где $x = \dfrac{\overline{x}}{L}$ − безразмерная координата, а $u = \dfrac{\overline{u}}{U}$ − безразмерная скорость (размерные величины обозначены чертой). При обезразмеривании в качестве характерных примем следующие величины:

- U − характерная скорость невозмущенного потока;
- ρU^2 – характерное давление;
- $\tau = \dfrac{L}{U}$ – гидродинамическое характерное время.

Общая обезразмеренная таким образом система уравнений (1.43), (1.44) имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{3.4}$$

Граничные условия в данном случае:

$$u\big|_{y=0} = v\big|_{y=0} = 0, \quad u\big|_{y\to\infty} \to 1. \tag{3.5}$$

Оценим порядок входящих в (3.2) – (3.4) членов. Для этого введем безразмерную толщину пограничного слоя $\delta = \dfrac{\overline{\delta}}{L} \ll 1$. Выполняемая оценка включает следующую последовательность шагов:

1) (3.5) $\Rightarrow$ $u \sim 1$;
2) в силу принятого обезразмеривания $\dfrac{\partial u}{\partial x} \sim 1$ $\Rightarrow$ второй член в (3.4) для выполнения равенства должен быть того же порядка $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial v}{\partial y} \sim 1$;

3) согласно определению пограничного слоя, основные изменения поля скорости происходят в слое толщиной δ $\Leftrightarrow$ условно это можно записать как $y \sim \delta \Rightarrow 2) \Rightarrow v \sim \delta$;

4) в силу принятого обезразмеривания $\dfrac{\partial u}{\partial x} \sim 1$ и $u \sim 1$ (шаг 1) $\Rightarrow x \sim 1$ $\Rightarrow 3) \Rightarrow v \sim \delta \Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial x} \sim \delta$ и $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sim \delta$;

5) поскольку характерный размер выбран так, что $\dfrac{\partial u}{\partial x} \sim 1$, и показано, что $x \sim 1 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim 1$;

6) из $y \sim \delta$ (шаг 3) и $u \sim 1$ (шаг 1) $\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial y} \sim \dfrac{1}{\delta}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \dfrac{1}{\delta^2}$;

7) из $\dfrac{\partial v}{\partial y} \sim 1$ (шаг 2) и $y \sim \delta$ (шаг 3) $\Rightarrow \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \dfrac{1}{\delta}$;

8) поскольку система уравнений обезразмерена так, что максимальный порядок входящих в нее членов не более единицы, то это касается и входящего в правую часть (3.2) члена $\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Тогда из оценки $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \dfrac{1}{\delta^2}$ (шаг 6) $\Rightarrow \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \sim \delta^2$ (что подтверждает зависимость (3.1) толщины пограничного слоя от числа Рейнольдса);

9) из проведенных оценок видно, что в уравнении (3.3) нет членов более высокого порядка, чем $\delta \Rightarrow$ это должно быть справедливо и для $\dfrac{\partial p}{\partial y} \Rightarrow \dfrac{\partial p}{\partial y} \sim \delta \Rightarrow$ с учетом $y \sim \delta$ (шаг 3) $\Rightarrow \Delta p \sim \delta^2$ или $p(x,y,t) \approx P(x,t)$, где P – давление в невозмущенном потоке, т.е. заданная функция.

Для производных по времени оценок не даем, поскольку для стационарных задач они равны нулю, а для нестационарных определяются порядком остальных членов уравнений.

Подытожим проведенные оценки 1) − 9), переписав уравнения (3.2) – (3.4) с указанием порядка величины входящих в них членов. В подстрочных комментариях к уравнениям под каждым сомножителем слагаемого первым символом укажем порядок величины сомножителя, а в скобках – номер шага, на котором получена оценка данного порядка. В надстрочных комментариях укажем итоговый порядок величины данного слагаемого. При этом порядок производных по времени определяется порядком наибольшего члена в соответствующем уравнении. Таким образом, (3.2) – (3.4) $\Rightarrow$

$$\underset{}{\overset{1}{\frac{\partial u}{\partial t}}}+\underset{1(1)}{u}\,\underset{1(2)}{\overset{1}{\frac{\partial u}{\partial x}}}+\underset{\delta(3)}{v}\,\underset{\frac{1}{\delta}(6)}{\overset{1}{\frac{\partial u}{\partial y}}}=-\underset{p\to P(9)}{\frac{\partial p}{\partial x}}+\underset{\delta^2(8)}{\frac{1}{\mathrm{Re}}}\underset{1(5)}{\overset{\delta^2}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}}+\underset{\delta^2(8)}{\frac{1}{\mathrm{Re}}}\underset{\frac{1}{\delta^2}(6)}{\overset{1}{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}}, \tag{3.6}$$

$$\overset{\delta}{\frac{\partial v}{\partial t}}+\underset{1(1)}{u}\,\underset{\delta(4)}{\overset{\delta}{\frac{\partial v}{\partial x}}}+\underset{\delta(3)}{v}\,\underset{1(2)}{\overset{\delta}{\frac{\partial v}{\partial y}}}=-\underset{\delta(9)}{\overset{\delta}{\frac{\partial p}{\partial y}}}+\underset{\delta^2(8)}{\frac{1}{\mathrm{Re}}}\underset{\delta(4)}{\overset{\delta^3}{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}}+\underset{\delta^2(8)}{\frac{1}{\mathrm{Re}}}\underset{\frac{1}{\delta}(7)}{\overset{\delta}{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}}, \tag{3.7}$$

$$\underset{1(2)}{\overset{1}{\frac{\partial u}{\partial x}}}+\underset{1(2)}{\overset{1}{\frac{\partial v}{\partial y}}}=0. \tag{3.8}$$

Отбрасывая в (3.6) – (3.8) все члены порядка менее единицы, приходим к выводу, что уравнение (3.7) целиком исчезает, в уравнении (3.6) пропадает пятый член, а давление задается известной функцией P. В результате система (3.6) – (3.8) преобразуется к размерному виду:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{3.10}$$

Уравнения (3.9), (3.10) − уравнения пограничного слоя Прандтля. Система из трех уравнений сократилась до двух уравнений. Однако она осталась замкнутой, т.к. число неизвестных функций также уменьшилось на единицу, поскольку давление заменилось известной функцией.

(3.5) $\Rightarrow$система (3.9), (3.10) решается при граничных условиях:

$$u\big|_{y=0}=v\big|_{y=0}=0,\quad u\big|_{y\to\infty}\to U. \tag{3.11}$$

§ 8. Задача о пограничном слое на плоской пластине

8.1 Пограничный слой на плоской пластине

Рассмотрим полубесконечную пластину, обтекаемую плоскопараллельным потоком вдоль ее плоскости (рис. 3.2).

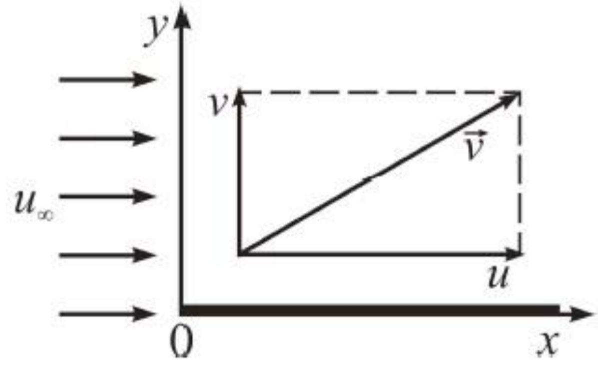

Рис. 3.2 − Система координат в задаче о пограничном слое на плоской пластине

Начало координат выбираем на передней кромке пластины, так что ось x направлена вниз по потоку. При $x \to -\infty$ невозмущенный поток однороден и имеет только одну, отличную от нуля, X-компоненту скорости, равную u_∞. Давление в потоке однородное, $P = \mathrm{Const}$.

Уравнения (3.9), (3.10) для стационарного течения в этом случае запишем в форме:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{3.13}$$

(3.11) $\Rightarrow$ граничные условия:

$$u\big|_{y=0} = v\big|_{y=0} = 0, \quad u\big|_{y\to\infty} \to u_\infty. \tag{3.14}$$

В задаче с данной постановкой не существует характерного размера. Это позволяет предположить, что профиль скорости аффинноподобен, т.е. зависимость u от y для различных x отличается только масштабным множителем $\dfrac{u}{u_\infty} = \varphi$, где $\varphi = \varphi\left(\dfrac{y}{\bar{\delta}}\right)$, причем $\bar{\delta} = \bar{\delta}(x)$. Если предположить, что, как и в задаче о течении вблизи критической точки, $\bar{\delta} \sim \sqrt{x}$, то систему (3.12), (3.13) можно упростить. (3.1) $\Rightarrow$ $\bar{\delta} \sim \sqrt{x}$ $\Rightarrow$ выберем коэффициент пропорциональности так, чтобы $\bar{\delta}$ имела размерность длины:

$$\bar{\delta} = \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}. \tag{3.15}$$

Введем автомодельную переменную $\eta \equiv \dfrac{y}{\bar{\delta}}$ $\Rightarrow$ с учетом (3.15) $\Rightarrow$ ищем решение в виде:

$$\underbrace{u = u_\infty \varphi(\eta)}_{1)}, \quad \underbrace{\eta = y\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}}_{2)}. \tag{3.16}$$

Введем функцию тока ψ согласно (2.29) следующим образом:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{3.17}$$

(3.17) $\to$ (3.12) и (3.13) $\Rightarrow$ (3.13) выполняется тождественно $\Rightarrow$ эта система сводится к одному уравнению относительно ψ:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \tag{3.18}$$

С учетом (3.16) $\Rightarrow$ ищем решение уравнения (3.18) в форме:

$$\psi = \sqrt{\nu x u_\infty}\, f(\eta), \ f'(\eta) \equiv \varphi(\eta), \tag{3.19}$$

где η определяется согласно (3.16–2). Если $\psi(x, y)$ будет найдена, то из (3.17) $\Rightarrow$ поле скоростей:

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=u_\infty f'(\eta),\qquad(3.20)$$

$$v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{u_\infty}{2}\sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}}\left(\eta f'(\eta)-f(\eta)\right).\qquad(3.21)$$

(3.19) $\to$ (3.18) $\Rightarrow$ после некоторых преобразований получим:

$$2f'''+ff''=0.\qquad(3.22)$$

Граничные условия (3.14) с помощью (3.20), (3.21) трансформируются:

$$f\big|_{\eta=0}=f'\big|_{\eta=0}=0,\quad f'\big|_{\eta\to\infty}\to 1.\qquad(3.23)$$

Краевая задача (3.22), (3.23) определяет f как некоторую специальную функцию. Она может быть вычислена (например, в виде рядов Тейлора). Свойства специальной функции $f(\eta)$ и ее производной $f'(\eta)$, найденных в явном виде, графически представлены на рис. 3.3, 3.4.

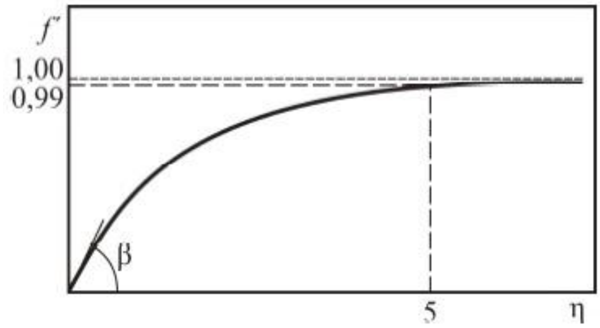

Рис. 3.3 − Свойства специальной функции $f'(\eta)$

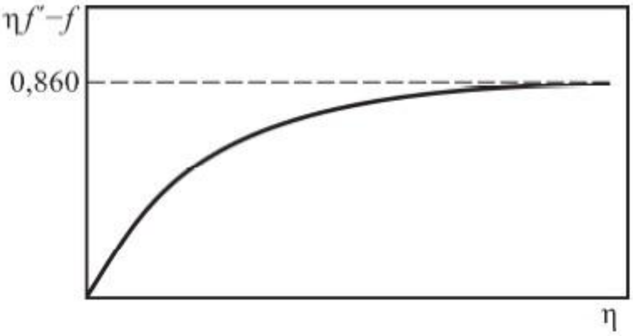

Рис. 3.4 − Свойства специальной функции $\eta f'(\eta)-f(\eta)$

Отметим исходя из рис. 3.3 характеристики зависимости $f'(\eta)$, которая согласно (3.20) является нормированным профилем продольной компоненты скорости:

$$\underbrace{f'(\infty)-f'(5)=0{,}01f'(\infty)}_{1)},\quad\underbrace{\mathrm{tg}\beta\equiv\alpha=0{,}332}_{2)},\quad\underbrace{\int\limits_0^\infty\left(1-f'(\xi)\right)\mathrm{d}\xi=1{,}7208}_{3)}.\qquad(3.24)$$

Исходя из рис. 3.4 для зависимости $\eta f'(\eta)-f(\eta)$, представляющей собой нормированную поперечную компоненту скорости, видно, что на бесконечности она не спадает к нулю, а выходит на асимптотику:

$$\eta f'(\infty)-f(\infty)=0{,}860.\qquad(3.24')$$

$$(3.21) \Rightarrow \eta f'(\eta) - f(\eta) = \frac{v}{u_\infty}\sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}} \Rightarrow (3.24') \Rightarrow \frac{v_\infty}{u_\infty}\sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}} = 0{,}860 \Rightarrow$$

$$v_\infty = 0{,}860 u_\infty \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}}\,. \qquad (3.24'')$$

Появление поперечной компоненты скорости в изначально плоскопараллельном потоке объясняется тем, что прилегающий к поверхности слой жидкости приторможен в силу нулевых граничных условий для скорости на поверхности, поэтому набегающий на него поток вынужден отклоняться к периферии, чтобы обтекать этот слой.

Поскольку теория пограничного слоя – это приближенная теория, то ее предсказания достоверны только при условии выполнения предположений, на которых основан ее вывод. Таким предположением является малость толщины пограничного слоя по сравнению с характерным размером задачи. В данной задаче, поскольку пластина полубесконечна, характерным размером по существу является расстояние от передней кромки пластины до точки или области, представляющей интерес, т.е. до значения координаты x в этом месте. В то же время характеристикой толщины пограничного слоя является величина $\bar{\delta}$, как следует из ее определения. Потому критерием, характеризующим правомочность приближения пограничного слоя, является малость отношения $\frac{\bar{\delta}}{x} = (3.15) = \frac{\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}}{x} = \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$. Отсюда видно, что в области вблизи передней кромки пластины (малые x) данное условие не выполняется и полученные выше результаты справедливы только в зоне, где $x \gg \frac{\nu}{u_\infty}$.