Лекция 10

Раздел 4. Системы уравнений ламинарного конвективного переноса

В этом разделе наряду с конвективными процессами, т.е. явлениями, связанными с течением среды, рассматривается также перенос тепла, обусловленный молекулярным механизмом переноса, или кондуктивный перенос тепла. Процессы, в которых проявляется совместное действие этих двух механизмов, называются процессами конвективного теплопереноса.

С формальной стороны это означает, что уравнения гидродинамики решаются совместно с уравнением теплопереноса, т.е. рассматривается полная система уравнений переноса (1.21) – (1.24). Будем изучать только конвективный теплоперенос, хотя в силу формального совпадения законов кондуктивного теплопереноса (закон Фурье) и диффузионного массопереноса (закон Фика) все задачи конвективного теплопереноса можно трактовать как задачи конвективного массопереноса, если заменить в них температуру на концентрацию примеси, коэффициент температуропроводности – на коэффициент диффузии, а тепловой поток – на диффузионный поток массы.

§ 9. Уравнения теплового пограничного слоя

9.1 Уравнения теплового пограничного слоя

Рассмотрим вначале задачи конвективного переноса при внешнем обтекании тел. Такие задачи возникают, когда обтекающий поток и поверхность обтекаемого тела имеют разные температуры или на поверхности обтекаемого тела задан тепловой поток.

Как видно из раздела 3, для гидродинамических задач такого рода хорошо работает приближение пограничного слоя, которое основано на наличии малого параметра $\overline{\delta}$ (толщины пограничного слоя) или, согласно (3.1), $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$.

Подобие формы уравнений гидродинамики и теплопереноса (1.62), (1.63) позволяет ожидать, что такое же приближение должно существовать и для задач теплопереноса, где малым параметром будет $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Pe}}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{RePr}}}$ или соответственно $\overline{\delta}_T$, т.е. толщина термического пограничного слоя. В данном случае термический пограничный слой – это прилегающая к обтекаемой поверхности зона, где происходит практически полное изменение температуры обтекающей среды: от температуры поверхности к температуре обтекающего потока на бесконечном удалении от поверхности.

В теории переноса с постоянными коэффициентами, т.е. в задаче переноса в случае несжимаемой жидкости (1.28) – (1.30), гидродинамическая задача может быть решена отдельно от тепловой в рамках теории пограничного слоя. Выбирая локальную систему координат и проводя обезразмеривание так же, как и в п. 8.1, уравнения гидродинамического пограничного слоя Прандтля (3.12), (3.13) в стационарном случае запишем в виде:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{4.2}$$

Дополним их уравнением стационарного теплопереноса (1.59) для безразмерной температуры $\theta=\dfrac{T-T_\infty}{T_w-T_\infty}$ (T_∞ и T_w − температуры набегающего потока и обтекаемой поверхности соответственно) в этой же системе координат:

$$u\frac{\partial \theta}{\partial x}+v\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{1}{\mathrm{Pe}}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right). \tag{4.3}$$

Оценим порядок входящих в (4.3) членов по аналогии с п. 7.2 с учетом того, что безразмерные толщины пограничных слоев – это величины одного порядка, т.е. $\delta_T \sim \delta$. При этом конечно $\delta_T \ll 1$ и, согласно обезразмериванию, $\theta \sim 1$. Оценку, как и ранее, будем проводить в виде последовательности шагов.

1) п. 7.2 $\Rightarrow$ $u \sim 1$;
2) п. 7.2 $\Rightarrow$ $v \sim \delta$;
3) $\theta \sim 1$ и $x \sim 1$ (что обусловлено самим выбором характерного размера задачи) $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial\theta}{\partial x} \sim 1$;
4) $\theta \sim 1$ и $y \sim \delta_T$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial\theta}{\partial y} \sim \dfrac{1}{\delta_T}$;
5) из шага 3) $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \sim 1$;
6) из шага 4) $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial^2\theta}{\partial y^2} \sim \dfrac{1}{\delta_T^2}$;
7) поскольку система уравнений обезразмерена так, что максимальный порядок входящих в нее членов не более единицы, это касается и входящего в правую часть (4.3) члена $\Rightarrow \dfrac{1}{\mathrm{Pe}}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial y^2} \sim 1$

   $\Rightarrow$ отсюда и из шага 6) $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{\mathrm{Pe}} \sim \delta_T^2$.

Подытожим проведенные в (4.3) оценки, расставляя порядки величин в этом уравнении таким же образом, как описано в п. 7.2:

$$\underset{1(1)}{u}\,\overset{1}{\underset{1(3)}{\frac{\partial\theta}{\partial x}}} + \underset{\delta(2)}{v}\,\overset{1}{\underset{\frac{1}{\delta_T}(4)}{\frac{\partial\theta}{\partial y}}} = \underset{\delta_T^2(7)}{\frac{1}{\mathrm{Pe}}}\,\overset{\delta_T^2}{\underset{1(5)}{\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}}} + \underset{\delta_T^2(7)}{\frac{1}{\mathrm{Pe}}}\,\overset{1}{\underset{\frac{1}{\delta_T^2}(6)}{\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}}}. \qquad (4.4)$$

Отбрасывая в (4.4) все члены порядка менее единицы, приходим к выводу, что в результате в нем исчезает третий член и уравнение сводится к следующему:

$$u\frac{\partial\theta}{\partial x} + v\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Pe}}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}. \qquad (4.5)$$

Уравнения (4.1), (4.2), (4.5) – это и есть система уравнений теплового пограничного слоя. Уравнения гидродинамики (4.1), (4.2) решаются отдельно, а затем эти решения используются в (4.5).

9.2 Аналогия Рейнольдса

Анализ системы уравнений теплового пограничного слоя позволяет, не прибегая к их решению, получить практически важные следствия о некоторой аналогии термических и гидродинамических процессов при конвективном теплопереносе. Это так называемая аналогия Рейнольдса. На ее основе можно по данным о гидравлическом сопротивлении рассчитать характеристики теплоотдачи и наоборот. Замечательным ее свойством является то, что она одинаково справедлива для ламинарных и турбулентных течений, для внешней и внутренней теплоотдачи.

Для вывода аналогии Рейнольдса сведем систему уравнений теплового пограничного слоя (4.1), (4.2), (4.5) к форме, не содержащей Re. С этой целью введем новые переменные:

$$\bar{v} = v\sqrt{\mathrm{Re}},\ \ \bar{y} = y\sqrt{\mathrm{Re}}. \qquad (4.6)$$

(4.6) $\to$ (4.1), (4.2), (4.5) $\Rightarrow$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial u}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{y}^2}, \qquad (4.7)$$

$$u\frac{\partial\theta}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial\theta}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial^2\theta}{\partial \bar{y}^2}, \qquad (4.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0. \qquad (4.9)$$

Как уже отмечалось в п. 3.2, при $\mathrm{Pr} = 1$ уравнения (4.7) и (4.8) становятся тождественными относительно u и θ. Решение этой системы уравнений будет иметь вид:

$$u = f_u\left(x, \bar{y}\right),\ \ v = f_v\left(x, \bar{y}\right),\ \ \theta = f_\theta\left(x, \bar{y}, \mathrm{Pr}\right). \qquad (4.10)$$

Возвращаясь в (4.10) к исходным переменным и размерному виду (размерные переменные отмечены тильдой), получим:

$$\frac{\tilde{u}}{u_\infty} = f_u\left(\frac{\tilde{x}}{L}, \frac{\tilde{y}}{L}\sqrt{\mathrm{Re}}\right), \quad \frac{\tilde{v}}{u_\infty} = f_v\left(\frac{\tilde{x}}{L}, \frac{\tilde{y}}{L}\sqrt{\mathrm{Re}}\right), \quad \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = f_\theta\left(\frac{\tilde{x}}{L}, \frac{\tilde{y}}{L}\sqrt{\mathrm{Re}}, \mathrm{Pr}\right). \quad (4.11)$$

Аналогия Рейнольдса выражается в терминах числа Нуссельта $\mathrm{Nu} = \frac{\alpha L}{\lambda}; \frac{q_w L}{(T_w - T_\infty)\lambda}$, который можно трактовать как безразмерный коэффициент теплоотдачи между исследуемой жидкостью и стенкой (п. 3.3). Из п. 3.3 и граничных условий 2-го рода (1.39) $\Rightarrow$

$$\mathrm{Nu} = \frac{q_w L}{(T_w - T_\infty)\lambda} = \frac{\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial \tilde{y}}\right|_{\tilde{y}=0} L}{(T_w - T_\infty)\lambda} \Rightarrow$$

$$\mathrm{Nu} = \frac{\left.\frac{\partial T}{\partial \tilde{y}}\right|_{\tilde{y}=0} L}{T_w - T_\infty} \quad (4.12)$$

Тепловой поток на поверхности $\Rightarrow$ (1.39) $\Rightarrow$ $q_w = \lambda \left.\frac{\partial T}{\partial \tilde{y}}\right|_{\tilde{y}=0}$ $\Rightarrow$ (4.11 − 3) $\Rightarrow$

$$q_w = \frac{\lambda}{L}\sqrt{\mathrm{Re}}\,(T_w - T_\infty)\,\overline{f}_\theta\left(\frac{\tilde{x}}{L}, \mathrm{Pr}\right), \quad (4.13)$$

где

$$\overline{f}_\theta\left(\frac{\tilde{x}}{L}, \mathrm{Pr}\right) = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\left.\left(f_\theta\left(\frac{\tilde{x}}{L}, \frac{\tilde{y}}{L}\sqrt{\mathrm{Re}}, \mathrm{Pr}\right)\right)\right|_{\tilde{y}=0}. \quad (4.13')$$

(4.13) $\rightarrow$ (4.12) $\Rightarrow$

$$\mathrm{Nu} = \sqrt{\mathrm{Re}}\,\overline{f}_\theta\left(\frac{\tilde{x}}{L}, \mathrm{Pr}\right). \quad (4.14)$$

Рассмотрим введенный в п. 8.2 безразмерный коэффициент сопротивления $C_f' = (3.26') = \frac{T_{xy}(\tilde{x})}{\frac{\rho u_\infty^2}{2}} = (3.25'') = \frac{\mu \left.\frac{\partial \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}}\right|_{\tilde{y}=0}}{\frac{\rho u_\infty^2}{2}}$ $\Rightarrow$ (4.11 − 1) $\Rightarrow$

$$C_f' = \frac{2}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\,\overline{f}_u\left(\frac{\tilde{x}}{L}\right), \quad (4.15)$$

где

$$\overline{f}_u\left(\frac{\tilde{x}}{L}\right) = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\left.\left(f_u\left(\frac{\tilde{x}}{L}, \frac{\tilde{y}}{L}\sqrt{\mathrm{Re}}\right)\right)\right|_{\tilde{y}=0}. \quad (4.15')$$

(4.14), (4.15) $\Rightarrow$

$$\mathrm{Nu} = \frac{1}{2} C_f' \,\mathrm{Re}\,\overline{f}\left(\frac{\tilde{x}}{L}, \mathrm{Pr}\right), \quad (4.16)$$

где

$$\bar{f}\left(\frac{\tilde{x}}{L}, \mathrm{Pr}\right) = \frac{\bar{f}_\theta\left(\frac{\tilde{x}}{L}, \mathrm{Pr}\right)}{\bar{f}_u\left(\frac{\tilde{x}}{L}\right)}. \qquad (4.16')$$

Выражение (4.16) и есть аналогия Рейнольдса. Оно связывает безразмерный коэффициент сопротивления и число Нуссельта (безразмерный коэффициент теплоотдачи).

Заметим, что при $\mathrm{Pr}=1$ функция $\bar{f}=1 \Rightarrow$ (4.16) $\Rightarrow$

$$\mathrm{Nu} = \frac{1}{2} C_f' \,\mathrm{Re}. \qquad (4.16'')$$

Благодаря отмеченной в начале данного раздела универсальности этого соотношения, оно во многих случаях дает возможность получать оценки для теплоотдачи по данным о гидравлическом сопротивлении и наоборот.