Лекция 11

§ 10. Уравнения свободно-конвективного переноса

10.1 Уравнения Буссинеска для свободно-конвективного теплообмена

Существует обширный класс явлений конвективного теплообмена, в которых само наличие теплообмена является причиной течения среды.

Такая ситуация имеет место, если рассматриваемая система находится в поле массовых сил.

Если система однородна, то массовая сила также однородна и компенсируется однородным градиентом гидростатического давления, так что система остается в неподвижном равновесии. При возникновении неоднородности температуры в силу теплового расширения образуется неоднородность плотности, а, следовательно, и неоднородность массовой силы, которая, как правило, не может быть скомпенсирована градиентом давления, а значит, должна привести к появлению течения. Проще говоря, более нагретые и менее плотные слои жидкости всплывают вверх, а более холодные опускаются. Возникающее течение, в свою очередь, модифицирует перенос тепла и, таким образом, наблюдается процесс, в котором оба явления − теплообмен и течение взаимосвязаны. Такие процессы называют свободной конвекцией или естественной конвекцией.

В отличие от других задач конвективного переноса в задачах свободно-конвективного теплопереноса нельзя решить гидродинамическую задачу отдельно от тепловой, как, например, в п. 9.1, а затем найденное поле скорости использовать в уравнении теплопереноса. Здесь обе задачи взаимосвязаны и их необходимо решать совместно.

Полная система уравнений конвективного переноса (1.21) – (1.24) описывает и свободно-конвективный перенос, поскольку учитывает эффекты сжимаемости и в уравнении (1.22) содержится член, определяющий массовую силу.

Однако такая система слишком сложна для решения и, кроме того, ее необязательно решать в полном виде, поскольку для большинства практически важных задач она может быть сведена к более простому виду в приближенной формулировке практически без потери точности.

Это приближение − приближение Буссинеска основано на том, что относительная величина вариаций плотности в свободно-конвективных течениях невелика и кинематика данных течений может описываться на основе соответствующего аппарата для несжимаемых жидкостей.

Запишем полную систему уравнений переноса (1.21) – (1.24):

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\rho\cdot\vec{v}+\mathrm{div}\vec{v}=0, \tag{4.17}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\vec{v} \cdot \vec{v} = \underline{-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p} + \frac{\lambda}{\rho}\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{v}\right) + \nu\Delta v + \vec{g}\,, \tag{4.18}$$

$$\rho c_V \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{grad}\theta \cdot \vec{v} \right) = \lambda\Delta\theta - p\operatorname{div}\vec{v}\,, \tag{4.19}$$

$$\rho = \hat{\rho}\left(p,\theta \right). \tag{4.20}$$

Как было отмечено выше, вывод приближения Буссинеска основывается на предположении о том, что $\frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1$. Это означает, что в уравнении (4.17) первые два члена можно отбросить, а сжимаемость учитывать только в члене, отвечающем за силовые параметры (подчеркнут в (4.18)), и в уравнении состояния (4.20).

Поскольку движущей силой конвективных течений являются изменения плотности и они малы, разложим уравнение (4.20) в ряд Тейлора около равновесных значений p_{eq}, θ_{eq}, ограничившись только линейными членами

$$\Rightarrow\ \hat{\rho}\left(p,\theta \right) = \hat{\rho}\left(p_{eq},\theta_{eq} \right) + \frac{\partial\hat{\rho}\left(p_{eq},\theta_{eq} \right)}{\partial\theta}\left(\theta - \theta_{eq} \right) + \frac{\partial\hat{\rho}\left(p_{eq},\theta_{eq} \right)}{\partial p}\left(p - p_{eq} \right) + \ldots\ \Rightarrow$$

$$\hat{\rho}\left(p,\theta \right) = \rho_{eq}\left(1 - \beta\left(\theta - \theta_{eq} \right) + \beta_p\left(p - p_{eq} \right) \right), \tag{4.21}$$

где

$$\rho_{eq} = \hat{\rho}\left(p_{eq},\theta_{eq} \right),\ \ \beta = -\frac{1}{\hat{\rho}}\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\theta}\bigg|_{p=p_{eq},\ \theta=\theta_{eq}},\ \ \beta_p = \frac{1}{\hat{\rho}}\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial p}\bigg|_{p=p_{eq},\ \theta=\theta_{eq}}. \tag{4.21$'$}$$

Величина β называется температурным коэффициентом объемного расширения, $\left[\beta \right] = \text{К}^{-1}$.

Рассмотрим все параметры как их равновесные значения плюс малые добавки $\Rightarrow$ $\theta = \theta_{eq} + \theta'$, $p = p_{eq} + p'$, $\rho = \rho_{eq} + \rho'$. Здесь p_{eq} не постоянно, а равно гидростатическому давлению.

Интегрируя (4.18) в равновесном состоянии $\vec{v} = 0$, получим:

$$p_{eq}\left(\vec{x} \right) = p_0 + \rho_{\text{ср}}\vec{g} \cdot \left(\vec{x} - \vec{x}_0 \right). \tag{4.22}$$

Если h есть характерный вертикальный размер (вдоль $\vec{g}$) $\Rightarrow$ (4.22) $\Rightarrow$ характерный перепад давлений $\Rightarrow$ $\delta p = \rho_{\text{ср}} g h$ $\Rightarrow$ (4.21$'$) $\Rightarrow$ этот перепад приведет к изменению плотности $\Rightarrow$ $\delta\rho_p = \beta_p \rho_{\text{ср}}^2 g h$ $\Rightarrow$

$$\frac{\delta\rho_p}{\rho_{\text{ср}}} = \beta_p \rho_{\text{ср}} g h. \tag{4.23$'$}$$

С другой стороны $\Rightarrow$ (4.21$'$) $\Rightarrow$ вариации температуры $\Delta\theta$ являются причиной изменения плотности $\Rightarrow$ $\delta\rho_\theta = \beta\rho_{\text{ср}}\Delta\theta$ $\Rightarrow$

$$\frac{\delta\rho_\theta}{\rho_{\text{ср}}} = \beta\Delta\theta. \tag{4.23$''$}$$

Поскольку $\beta \approx 3\cdot 10^{-3}\text{К}^{-1}$ (газы) и $\beta \approx 0{,}5\cdot 10^{-3}\text{К}^{-1}$ (жидкости), а $\beta_p \approx 3\cdot 10^{-5}\text{Па}^{-1}$ (газы) и $\beta_p \approx 0{,}5\cdot 10^{-5}\text{Па}^{-1}$ (жидкости), то нетрудно убедиться, что при умеренных перепадах температуры $\Rightarrow$ (4.23′), (4.23″) $\Rightarrow$

$$\frac{\delta\rho_p}{\rho_{\text{ср}}} \ll \frac{\delta\rho_\theta}{\rho_{\text{ср}}} \ll 1. \qquad (4.23)$$

(4.23) $\Rightarrow$ в (4.21) последний член в скобках можно опустить $\Rightarrow$

$$\rho = \rho_{\text{ср}}\left(1-\beta\theta'\right). \qquad (4.24)$$

Таким образом, в силу неравенства (4.23), как и было отмечено ранее, в уравнениях (4.17) – (4.19) будем учитывать изменения плотности только в силовом члене (подчеркнут), в остальных жидкость рассматриваем как несжимаемую. Тогда уравнения (4.17) – (4.19) принимают вид:

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0, \qquad (4.25)$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\vec{v}\cdot\vec{v} = \underline{-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p} + \nu\Delta v + \vec{g}, \qquad (4.26)$$

$$\rho c_V\left(\frac{\partial\theta}{\partial t} + \operatorname{grad}\theta\cdot\vec{v}\right) = \lambda\Delta\theta. \qquad (4.27)$$

Рассмотрим подчеркнутый член в (4.26), линеаризуя его по $\beta\theta'$ $\Rightarrow$

$$\underline{\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p} = \left[p = p_{eq} + p'\right] = \frac{\operatorname{grad}\left(p_{eq} + p'\right)}{\rho} = (4.22) = \frac{\operatorname{grad}\left(p_0 + \rho_{\text{ср}}\vec{g}\cdot\left(\vec{x}-\vec{x}_0\right) + p'\right)}{\rho} =$$

$$= (4.24) = \frac{\operatorname{grad}\left(p_0 + \rho_{\text{ср}}\vec{g}\cdot\left(\vec{x}-\vec{x}_0\right) + p'\right)}{\rho_{\text{ср}}\left(1-\beta\theta'\right)} = \frac{\rho_{\text{ср}}\vec{g} + \operatorname{grad}p'}{\rho_{\text{ср}}\left(1-\beta\theta'\right)} = \vec{g} + \frac{\operatorname{grad}p'}{\rho_{\text{ср}}} + \vec{g}\beta\theta'. \Rightarrow$$

$$\underline{\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p} = \vec{g} + \frac{\operatorname{grad}p'}{\rho_{\text{ср}}} + \vec{g}\beta\theta' \qquad (4.28')$$

(4.28′) $\to$ (4.26) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\vec{v}\cdot\vec{v} = -\frac{1}{\rho_{\text{ср}}}\operatorname{grad}p' + \nu\Delta v - \vec{g}\beta\theta'. \qquad (4.28)$$

Система (4.25), (4.27), (4.28) и есть система уравнений свободно-конвективного переноса в приближении Буссинеска. Из нее явным образом видно, что уравнения взаимосвязаны, поскольку в уравнение для скорости (4.28) входит температура, а в уравнение для температуры (4.27) – скорость. Поэтому эти уравнения требуют совместного решения.

10.2 Критерии подобия для свободно-конвективного теплообмена

Обезразмерим систему (4.25), (4.27), (4.28). Пусть заданы характерный размер L и характерный перепад температуры $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_0$. Построим остальные характерные значения по параметрам задачи:

- $U = \dfrac{\nu}{L}$ − характерная скорость;
- $P = \rho_{\text{ср}} U^2$ – характерное давление;
- $\tau = \dfrac{L^2}{\nu}$ – кинематическое характерное время.

Обезразмеривая стандартным образом, получим связь размерных и безразмерных (с тильдой) параметров и операторов:

$$\tilde{\vec{v}} = \frac{\vec{v}}{U},\ \ \tilde{\vec{x}} = \frac{\vec{x}}{L},\ \ \tilde{\theta} = \frac{\theta - \theta_0}{\Delta\theta},\ \ \tilde{t} = \frac{t}{\tau},\ \ \tilde{p} = \frac{p'}{P}, . \tag{4.29}$$

$$\widetilde{\mathrm{grad}} = L\mathrm{grad},\ \ \widetilde{\mathrm{div}} = L\mathrm{div},\ \ \tilde{\Delta} = L^2\Delta$$

(4.29) $\rightarrow$ (4.25), (4.27), (4.28) $\Rightarrow$безразмерная система уравнений свободно-конвективного переноса:

$$\widetilde{\mathrm{div}}\tilde{\vec{v}} = 0, \tag{4.30}$$

$$\frac{\partial\tilde{\vec{v}}}{\partial\tilde{t}} + \widetilde{\mathrm{grad}}\tilde{\vec{v}} \cdot \tilde{\vec{v}} = -\widetilde{\mathrm{grad}}\tilde{p} + \tilde{\Delta}\tilde{\vec{v}} - \mathrm{Gr}\frac{\vec{g}}{g}\tilde{\theta}, \tag{4.31}$$

$$\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\tilde{t}} + \widetilde{\mathrm{grad}}\tilde{\theta} \cdot \tilde{\vec{v}} = \mathrm{Pr}\,\tilde{\Delta}\tilde{\theta}. \tag{4.32}$$

Здесь все размерные параметры, входящие в уравнение (4.31), образовали безразмерный комплекс, определяющий процесс подобия теплообмена при конвекции в поле тяжести, называемый критерием Грасгофа $\Rightarrow$ п. 3.3 $\Rightarrow$

$$\mathrm{Gr} = \frac{\beta g \Delta\theta L^3}{\nu^2}. \tag{4.33}$$

Если на границах задан тепловой поток q_w, а не перепад температуры $\Rightarrow$ п. 3.3 $\Rightarrow$ критерий Грасгофа модифицируется:

$$\mathrm{Gr} = \frac{\beta g q_w L^4}{\nu^2\lambda}. \tag{4.33$'$}$$

Также используется критерий подобия, определяющий поведение жидкости под воздействием градиента температуры − число Рэлея $\Rightarrow$ п. 3.3 $\Rightarrow$

$$\mathrm{Ra} = \mathrm{GrPr} = \frac{\beta g \Delta\theta L^3}{\nu a} \tag{4.33$''$}$$

либо

$$\mathrm{Ra} = \mathrm{GrPr} = \frac{\beta g q_w L^4}{\nu\lambda a}. \tag{4.33$'''$}$$