

## Лекция 15

Перейдем от переменной  $\xi$  к исходной радиальной переменной, заменяя при обозначении переменных  $\tilde{r}$  на  $r$  (также далее произведем замену при обозначении переменных  $\tilde{z}$  на  $z$ ). (5.56)  $\rightarrow$  (5.59)  $\Rightarrow$

$$\psi(\varepsilon r, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} (\varepsilon r)^{2n}. \quad (5.61)$$

Наличие второго аргумента  $\varepsilon$  у этой функции отражает тот факт, что коэффициенты  $b_{2n}$ , которые ее определяют, зависят от  $\varepsilon$ , как следует из (5.60). (5.61)  $\rightarrow$  (5.55–2) для нахождения неопределенной константы  $\varepsilon \Rightarrow$

$$\Psi(\varepsilon) \equiv \psi(\varepsilon, \varepsilon) = 0. \quad (5.61')$$

Уравнение (5.61') имеет дискретное счетное множество (спектр) корней. Приведем значения нескольких первых корней:

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = 2,705 \\ \varepsilon_1 = 6,66 \\ \varepsilon_2 = 10,3 \\ \dots \end{cases}. \quad (5.62)$$

Каждому такому собственному числу  $\varepsilon_n$  соответствует собственная функция  $\psi_n(r)$ , определяемая согласно (5.61) как:

$$\psi_n(r) = \psi(\varepsilon_n r, \varepsilon_n), \quad (5.63)$$

которая является решением уравнения (5.53) и удовлетворяет краевым условиям (5.55).

Первые три собственные функции (5.63), соответствующие константам (5.62), показаны на рис. 5.6. Как видно из этого рисунка, с увеличением номера функции растет тенденция к ее осцилляционному поведению. В общем случае выполняется правило: число экстремумов собственной функции равно ее номеру.

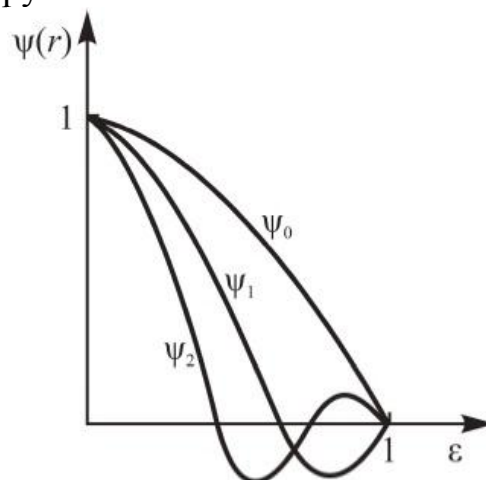


Рис. 5.6 – Собственные функции  $\psi_n(r)$  для набора констант  $\varepsilon_n$

Для собственных функций  $\psi_n(r)$  можно доказать условие ортогональности:

$$\int_0^1 \psi_n(r) \psi_m(r) r(1-r^2) dr = 0, \quad \forall m \neq n. \quad (5.64)$$

Доказательство:

(5.63)  $\rightarrow$  (5.53)  $\Rightarrow$

$$\psi_m(r) r(1-r^2) = -\frac{1}{\varepsilon_m^2} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\psi_m(r)}{dr} \right). \quad (5.65)$$

(5.65)  $\rightarrow$  (5.64)  $\Rightarrow$  проинтегрируем полученное выражение по частям дважды. При этом внеинтегральные члены интегрирования по частям обнуляются благодаря наличию в них множителя  $r$  и краевому условию (5.55)  $\Rightarrow$

$$\int_0^1 \psi_n(r) \psi_m(r) r(1-r^2) dr = -\frac{1}{\varepsilon_m^2} \int_0^1 \psi_m(r) \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\psi_n(r)}{dr} \right) dr. \quad (5.66)$$

Вспользуемся в последнем интеграле соотношением (5.65) для функции

$$\psi_n(r) \rightarrow (5.66) \Rightarrow \int_0^1 \psi_n(r) \psi_m(r) r(1-r^2) dr - \frac{\varepsilon_n^2}{\varepsilon_m^2} \int_0^1 \psi_m(r) \psi_n(r) r(1-r^2) dr = 0$$

$\Rightarrow$  отсюда следует условие ортогональности (5.64).

Рассмотрим еще одно свойство функций  $\psi_m(r) \Rightarrow \int_0^1 (5.65) dr \Rightarrow$

$$\int_0^1 \psi_m(r) r(1-r^2) dr = -\frac{1}{\varepsilon_m^2} \int_0^1 \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\psi_m(r)}{dr} \right) dr = -\frac{1}{\varepsilon_m^2} \left( \frac{d\psi_m(r)}{dr} \Big|_{r=1} - \frac{d\psi_m(r)}{dr} \Big|_{r=0} \right) \Rightarrow$$

(5.55-1)  $\Rightarrow$

$$\int_0^1 \psi_m(r) r(1-r^2) dr = -\frac{1}{\varepsilon_m^2} \frac{d\psi_m(r)}{dr} \Big|_{r=1}. \quad (5.67)$$

## 15.2 Решение задачи Гретца – Нуссельта

Вернемся к общему решению (5.49). Подставляя в него найденное решение (5.54) для функции  $\phi(z)$  и любую из функций  $\psi_n(r)$  (5.63), получим набор частных решений уравнения (5.47), удовлетворяющих краевым условиям (5.48), но не удовлетворяющих начальному условию  $\theta|_{z=0} = 0 \Rightarrow$

$$\theta_n(r, z) = A_n e^{-\frac{\varepsilon_n^2 z}{\text{Pe}}} \psi_n(r). \quad (5.68)$$

Общее решение (5.49), удовлетворяющее произвольному начальному условию, будем искать в виде ряда, представляющего собой суперпозицию указанных частных решений (5.68) с пока неопределенными

коэффициентами  $A_n \Rightarrow \theta(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(r, z) \Rightarrow (5.68) \Rightarrow$

$$\theta(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\frac{\varepsilon_n^2 z}{\text{Pe}}} \psi_n(r). \quad (5.69)$$

Потребуем, чтобы в начальном сечении  $z=0$  решение (5.69) удовлетворяло некоторому заданному распределению температуры  $\theta_0(r) \Rightarrow (5.69)|_{z=0} = \theta_0(r) \Rightarrow (5.69) \Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \psi_n(r) = \theta_0(r). \quad (5.70)$$

$$\int_0^1 (5.70) \psi_m(r) r(1-r^2) dr \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^1 \psi_n(r) \psi_m(r) r(1-r^2) dr = \int_0^1 \theta_0(r) \psi_m(r) r(1-r^2) dr. \quad (5.71)$$

В силу условий ортогональности (5.64) в сумме в левой части (5.71) остается ненулевым только один член, в котором  $n=m \Rightarrow (5.71) \Rightarrow$

$$A_n \int_0^1 \psi_n(r) \psi_n(r) r(1-r^2) dr = \int_0^1 \theta_0(r) \psi_n(r) r(1-r^2) dr. \quad (5.72')$$

$$(5.72') \Rightarrow$$

$$A_n = \frac{\int_0^1 \theta_0(r) \psi_n(r) r(1-r^2) dr}{\int_0^1 \psi_n^2(r) r(1-r^2) dr}. \quad (5.72)$$

Таким образом, выражение (5.69), в котором функции  $\psi_n(r)$  определены в (5.59) – (5.63), а коэффициенты  $A_n$  – в (5.72), является решением задачи с произвольным распределением температуры в начальном сечении.

Для случая  $\theta_0(r)=1 \Rightarrow (5.67)$  для функций  $\psi_n(r) \rightarrow (5.72)$  при  $\theta_0(r)=1 \Rightarrow$

$$A_n = \frac{-\frac{1}{\varepsilon_n^2} \frac{d\psi_n(r)}{dr} \Big|_{r=1}}{\int_0^1 \psi_n^2(r) r(1-r^2) dr}. \quad (5.73)$$

Уравнение (5.73) также определяет дискретное счетное множество (спектр) коэффициентов  $A_n$ . Приведем значения некоторых из них:

$$\begin{cases} A_0 = 1,477 \\ A_1 = -0,810 \\ A_2 = 0,385 \\ \dots \end{cases}. \quad (5.73')$$

На рис. 5.7 приведены рассчитанные по соотношениям (5.69), (5.73), (5.73') зависимости температуры от радиальной координаты на различных расстояниях от начального сечения (зависимости  $\theta(r)$  рассматриваются при различных значениях продольной координаты  $z$ , вместо которой используется безразмерный комплекс  $\frac{1}{Pe R} z$ ).

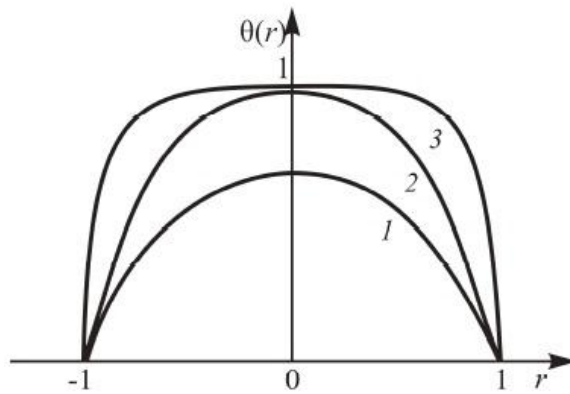


Рис. 5.7 – Зависимости  $\theta(r)$  на различных расстояниях от начального сечения ( $1 - \frac{1}{Pe R} z = 0,1$ ;  $2 - \frac{1}{Pe R} z = 0,125$ ;  $3 - \forall z$ )

(5.69) и (5.47')  $\Rightarrow$  распределение температуры в размерном виде:

$$\frac{T - T_w}{T_0 - T_w} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\frac{\varepsilon_n^2 z}{Pe R}} \psi_n\left(\frac{r}{R}\right). \quad (5.74)$$

Заметим, что в ряде (5.74), представляющем решение для температуры, скорость затухания экспонент, описывающих зависимость от  $z$ , очень быстро растет с увеличением номера члена ряда, что обусловлено существенным увеличением значений собственных чисел  $\varepsilon_n$  с ростом номера  $n$  согласно (5.62). Это означает, что по мере удаления от начального сечения члены ряда высоких порядков быстро вырождаются, и распределение температуры описывается только главным членом нулевого порядка. Эта область, где убывание температуры подчиняется экспоненциальному закону, называется областью регулярного режима (рис. 5.8).

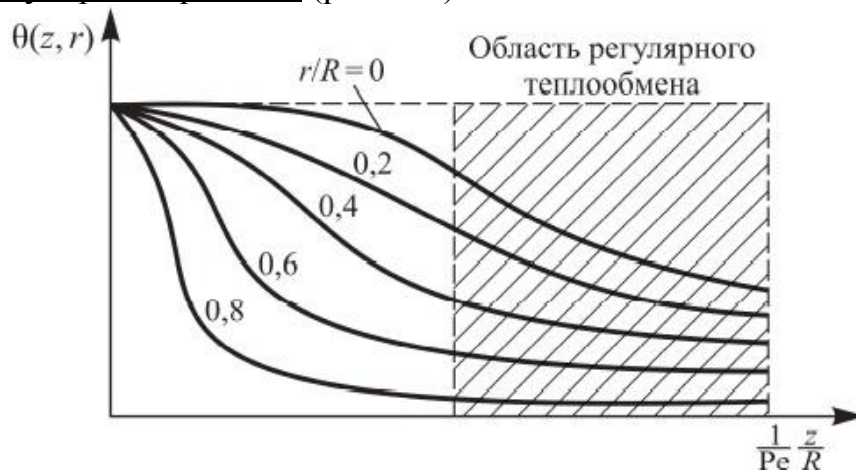


Рис. 5.8 – Зависимость  $\theta(r, z)$  на различных расстояниях от оси

(5.74)  $\Rightarrow$  температура в области регулярного режима описывается выражением вида:

$$\frac{T - T_w}{T_0 - T_w} = A_0 e^{-\frac{\varepsilon_0^2 z}{Pe R}} \Psi_0\left(\frac{r}{R}\right). \quad (5.75)$$

### 15.3 Числа Нуссельта в задаче Гретца – Нуссельта

Рассчитаем число Нуссельта  $\Rightarrow Nu = \frac{qd}{\lambda(\bar{T}(z) - T(R, z))} \Rightarrow$  согласно закону Фурье  $\Rightarrow q = -\lambda \text{grad}T \Rightarrow$

$$Nu = \frac{\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R} 2R}{T_w - \bar{T}(z)}, \quad (5.76)$$

где средневзвешенная температура  $\bar{T}(z)$  определяется как:

$$\bar{T}(z) = \frac{2\pi \int_0^R T(r, z) 2\bar{u} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) r dr}{\pi R^2 \bar{u}}. \quad (5.77)$$

(5.74) с учетом (5.67)  $\rightarrow$  (5.77)  $\rightarrow$  (5.76)  $\Rightarrow$

$$Nu = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{-\frac{\varepsilon_n^2 z}{Pe R}}}{2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{\varepsilon_n^2} e^{-\frac{\varepsilon_n^2 z}{Pe R}}}, \quad (5.78)$$

где

$$B_n = -\frac{1}{2} A_n \left. \frac{\partial \Psi_n\left(\frac{r}{R}\right)}{\partial r} \right|_{r=R}. \quad (5.78')$$

Рассмотрим некоторые примеры практического применения общего выражения для числа Нуссельта вида (5.78), (5.78').

1) В области регулярного режима теплообмена, где температурное поле описывается соотношением (5.75), число Нуссельта имеет постоянное значение. В этом нетрудно убедиться, повторяя для (5.75) вычисления, приведенные выше: (5.75) с учетом (5.67)  $\rightarrow$  (5.77)  $\rightarrow$  (5.76)  $\Rightarrow Nu_{reg} = \frac{\varepsilon_0^2}{2} \Rightarrow$  (5.62)  $\Rightarrow$

$$Nu_{reg} = 3,66. \quad (5.79)$$

Кутателадзе показано, что соотношение (5.79) справедливо для области критериев  $Pe \frac{d}{L} < 12$ .

Зависимость числа Нуссельта от продольной координаты представлена на рис. 5.9. Из этой зависимости наглядно виден выход на режим регулярного теплообмена, где критерий Нуссельта принимает постоянное значение  $Nu = Nu_{reg}$ .

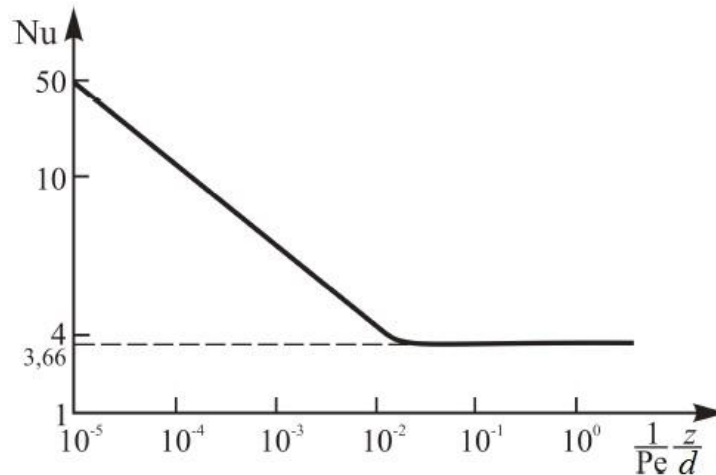


Рис. 5.9 – Зависимость числа Нуссельта от продольной координаты при ламинарном течении в трубе

Из рис. 5.9 также следует, что область нерегулярного теплообмена занимает не более 20 калибров трубы.

2) Кутателадзе показано, что в области критериев  $Pe \frac{d}{L} > 12$  для числа Нуссельта справедливо соотношение вида:

$$Nu = 1,61 \sqrt[3]{Pe \frac{d}{L}}. \quad (5.80)$$

3) При турбулентном течении в трубах рекомендуется использовать выражение для числа Нуссельта вида:

$$Nu = 0,021 (Re)^{0,8} (Pr)^{0,43}. \quad (5.81)$$