

## 17.2 Метод Рейнольдса

Методология описания турбулентных течений, суть которой заключается в представлении мгновенных значений всех гидродинамических величин (скорости, плотности, температуры и т.д.) в виде суммы осредненных (по времени или по ансамблю) и пульсационных (турбулентных) составляющих была сформулирована Рейнольдсом.

Суть метода Рейнольдса состоит в осреднении мгновенных значений пульсирующих гидродинамических параметров в пределах некоторого промежутка времени  $T$ . Промежуток осреднения должен удовлетворять условию  $\tau_t \ll T \ll t_x$ , где  $\tau_t$  – период пульсаций,  $t_x$  – характерное время изменения внешних условий, определяющих нестационарность процесса. Период пульсаций  $\tau_t$  можно найти из измерений частотного спектра пульсаций некоторой пульсирующей величины  $\phi$ , как показано на рис. 6.3.

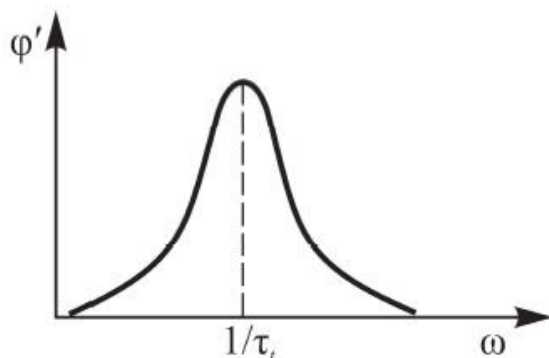


Рис. 6.3 – К определению периода пульсаций некоторой пульсирующей величины  $\phi$

В результате такого осреднения получаются либо постоянные во времени (для стационарных процессов), либо плавно меняющиеся (для нестационарных процессов) величины, в которых пульсирующая составляющая исключена.

Таким образом, для любой пульсирующей величины  $\phi$  осредненное значение вычисляется как:

$$\bar{\phi}(\vec{x}, t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \phi(\vec{x}, \tau) d\tau, \quad (6.2)$$

а пульсирующая составляющая как:

$$\phi'(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}, t) - \bar{\phi}(\vec{x}, t). \quad (6.3)$$

(6.3)  $\Rightarrow$  мгновенные значения любой флуктуирующей величины можно разложить на пульсационную составляющую (со штрихом) и плавно меняющуюся (с чертой):

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi'(\vec{x}, t) + \bar{\phi}(\vec{x}, t). \quad (6.4)$$

Операция усреднения (6.2), как следует из ее определения, является линейной и обладает следующим рядом свойств.

1) Среднее от  $\forall a = \text{Const}$  равно этой константе, как очевидно следует из (6.2):

$$\bar{a} = a. \quad (6.5)$$

2) При повторном усреднении ничего не меняется:

$$\overline{\bar{\varphi}} = \bar{\varphi}. \quad (6.6)$$

Доказательство:

Из условия  $T \square t_x \Rightarrow$  после усреднения (6.2) характерным временным масштабом изменения функции  $\bar{\varphi}(t)$  является  $t_x$ , поэтому для моментов времени  $\tau$  в интервале  $t - \frac{T}{2} < \tau < t + \frac{T}{2}$  ее изменение с высокой точностью описывается линейной аппроксимацией:

$$\bar{\varphi}(\tau) = \bar{\varphi}(t) + \frac{d\bar{\varphi}(t)}{dt}(\tau - t). \quad (6.7)$$

(6.7) вместо  $\varphi(\vec{x}, \tau) \rightarrow$  (6.2)  $\Rightarrow$  (6.6).

3) Среднее от пульсационной составляющей равно нулю:

$$\bar{\varphi}' = 0. \quad (6.8)$$

Доказательство:

$$\bar{\varphi}' = (6.3) = \overline{\varphi - \bar{\varphi}} = [\text{линейность осреднения}] = \bar{\varphi} - \overline{\bar{\varphi}} = (6.6) = \bar{\varphi} - \bar{\varphi} = 0.$$

4) Если  $\psi$  – это еще одна пульсирующая величина, то, как следует из линейности операции осреднения, имеет место свойство:

$$\overline{\varphi\psi} = \bar{\varphi}\bar{\psi}. \quad (6.9)$$

5) Операции осреднения и операторы градиента и лапласиана коммутируют, что очевидно следует из (6.2):

$$\begin{aligned} \text{grad}\bar{\varphi} &= \overline{\text{grad}\varphi} \\ \Delta\bar{\varphi} &= \overline{\Delta\varphi}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

б) Операции осреднения и взятия производной по времени коммутируют:

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial t} = \overline{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}. \quad (6.11)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial t} &= (6.2) = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial t} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \varphi(\tau) d\tau = \frac{1}{T} \left( \varphi\left(t + \frac{T}{2}\right) - \varphi\left(t - \frac{T}{2}\right) \right) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \frac{\partial\varphi(\tau)}{\partial\tau} d\tau = (6.2) = \\ &= \overline{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}. \end{aligned}$$

### 17.3 Уравнения Рейнольдса осредненного турбулентного течения

Рассмотрим уравнения движения для несжимаемой жидкости (1.28), (1.29):

$$\text{уравнение Навье – Стокса} \Rightarrow \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = -\text{grad} p + \mu \Delta \vec{v}, \quad (6.12)$$

$$\text{уравнение неразрывности} \Rightarrow \text{div} \vec{v} = 0, \quad (6.13)$$

где обе переменные ( $\vec{v}$  и  $p$ ) являются пульсирующими величинами  $\Rightarrow$  (6.4)

$\Rightarrow$

$$\vec{v} = \bar{\vec{v}} + \vec{v}', \quad p = \bar{p} + p'. \quad (6.14)$$

(6.8)  $\Rightarrow$

$$\vec{v}' = 0, \quad p' = 0. \quad (6.14')$$

Воспользуемся известным соотношением тензорного анализа для  $\vec{v}$ :

$$\text{div}(\vec{v} \times \vec{v}) = (\text{grad} \vec{v}) \vec{v} + \vec{v} \text{div} \vec{v}. \quad (6.15)$$

$$(6.15) \Rightarrow (\text{grad} \vec{v}) \vec{v} = \text{div}(\vec{v} \times \vec{v}) - \vec{v} \text{div} \vec{v} = (6.13) = \text{div}(\vec{v} \times \vec{v}) \Rightarrow (6.12) \Rightarrow$$

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{div}(\vec{v} \times \vec{v}) \right) = -\text{grad} p + \mu \Delta \vec{v}. \quad (6.16)$$

(6.14)  $\rightarrow$  (6.16)  $\Rightarrow$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{\vec{v}}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \text{div}(\bar{\vec{v}} \times \bar{\vec{v}} + \vec{v}' \times \bar{\vec{v}} + \bar{\vec{v}} \times \vec{v}' + \vec{v}' \times \vec{v}') \right) =$$

$$= -\text{grad} p - \text{grad} p' + \mu \Delta (\bar{\vec{v}} + \vec{v}'). \quad (6.17)$$

Применим к уравнению (6.17) операцию осреднения (6.2) и воспользуемся свойством линейности операции осреднения и свойствами (6.6), (6.8) – (6.11)  $\Rightarrow$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{\vec{v}}}{\partial t} + \text{div}(\bar{\vec{v}} \times \bar{\vec{v}} + \overline{\vec{v}' \times \vec{v}'} \right) = -\text{grad} p + \mu \Delta \bar{\vec{v}}. \quad (6.18)$$

(6.18) с учетом (6.13), (6.15) и тензорного соотношения (1.18)  $\Rightarrow$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{\vec{v}}}{\partial t} + (\text{grad} \bar{\vec{v}}) \bar{\vec{v}} \right) = -\text{grad} p + \text{div} \left( \mu (\text{grad} \bar{\vec{v}} + (\text{grad} \bar{\vec{v}})^T) - \rho \overline{\vec{v}' \times \vec{v}'} \right). \quad (6.19)$$

Тензор

$$T_i = -\rho \overline{\vec{v}' \times \vec{v}'} \quad (6.20)$$

называют тензором турбулентных напряжений.

Рассмотрим уравнение конвективного переноса (1.25):

$$\rho c_v \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\text{grad} \theta) \vec{v} \right) = \lambda \Delta \theta - p \text{div} \vec{v} + \rho Q_v. \quad (6.21)$$

Аналогично выводу уравнения (6.19) применим операцию усреднения к уравнению конвективного переноса (6.21), считая обе переменные ( $\vec{v}$  и  $\theta$ ) пульсирующими величинами аналогично (6.14). В результате получим уравнение переноса тепла в турбулентных течениях вида:

$$\rho c_v \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\text{grad} \theta) \vec{v} \right) = \text{div} \left( \lambda \text{grad} \theta + \overline{\rho c_v \vec{v}' \theta'} \right). \quad (6.22)$$

Вектор

$$\vec{q}_t = \overline{\rho c_v \vec{v}' \theta'} \quad (6.23)$$

называют вектором турбулентного теплового потока.

Уравнения баланса импульса и баланса энергии (6.19), (6.22) называются уравнениями Рейнольдса осредненного турбулентного течения.

При этом уравнения (6.19), (6.22) являются незамкнутыми, следовательно, этот метод не позволяет получить решение той или иной задачи турбулентного переноса в рамках строгой математической постановки. В отличие от уравнений динамики вязкой жидкости, содержащих тензор вязких напряжений (1.10), который легко выражается через тензор скоростей деформаций с учетом (1.18), уравнения Рейнольдса содержат еще тензор турбулентных напряжений и вектор турбулентного теплового потока, природа и свойства которых целиком определяются характеристиками пульсационного движения.

Поэтому для описания турбулентных потоков в рамках метода Рейнольдса неизбежным этапом оказывается моделирование турбулентных напряжений и теплового потока, суть которого сводится к установлению эмпирических или полуэмпирических связей между этими величинами и осредненными характеристиками самого потока, прежде всего характеристиками поля скоростей и температуры. Такие соотношения называются моделями турбулентности.