Лекция 18

§ 18. Модель турбулентности Прандтля

18.1 Гипотеза Буссинеска

Гипотеза Буссинеска, основывающаяся на концепции вихревой вязкости, заключается в том, что тензор турбулентных напряжений (6.20) можно определить подобно тензору вязких напряжений (1.10), через градиенты от осредненного поля скорости с новыми эмпирическими константами.

(1.10) $\Rightarrow$ $T = 2\mu D + \left(-p + \xi \mathrm{tr} D\right) I$ $\Rightarrow$ для тензора турбулентных напряжений (6.20) получим:

$$T_t = 2\mu_t D - \frac{2}{3}\rho k I\,, \tag{6.24}$$

где $D = \frac{1}{2}\left(\mathrm{grad}\vec{v} + \left(\mathrm{grad}\vec{v}\right)^T\right)$, μ_t − коэффициент турбулентной (вихревой) вязкости. Величина

$$k = \frac{1}{2}\overline{\vec{v}' \cdot \vec{v}'} \tag{6.25}$$

называется удельной кинетической энергией турбулентности. Строго говоря, μ_t и k не являются константами, а могут зависеть от места и времени, т.е. являются функциями, которые также необходимо определить.

Само по себе уравнение (6.24) не вводит модели турбулентности, а только характеризует структуру такой модели, при этом основной задачей при работе согласно гипотезе Буссинеска является задание функции μ_t. В отличие от коэффициента молекулярной вязкости μ коэффициент μ_t определяется состоянием турбулентности и не связан со свойствами жидкости. Он может сильно изменяться от точки к точке пространства в зависимости от типа течения.

Так, например, в зонах циркуляционного течения μ_t может на несколько порядков превышать μ. Известно также, что для течения в открытом канале μ_t распределен по глубине по параболическому закону, а для плоской струи он изменяется пропорционально квадратному корню от расстояния до источника.

Иногда при расчетах турбулентных течений коэффициент турбулентной вязкости принимается постоянным: $\mu_t = \mathrm{Const}$ (как и полагал первоначально Буссинеск). Такое предположение вместе с гипотезой Буссинеска является простейшей моделью турбулентности, называемой моделью Буссинеска.

Подвергаясь справедливой критике как физически необоснованное, это предположение, однако, довольно широко применяется, поскольку позволяет получать вполне приемлемые результаты в инженерной практике. Однако столь грубое описание турбулентности допустимо в тех случаях, когда величина турбулентного переноса не имеет существенного значения или использование более сложных конструкций представляется неоправданным.

В более реалистичных моделях турбулентности наряду с гипотезой Буссинеска используются либо алгебраические соотношения, связывающие коэффициент турбулентной вязкости с характеристиками осредненного течения (алгебраические модели), либо строятся дополнительные уравнения переноса для осредненных пульсационных характеристик, через которые выражается μ_t.

18.2 Теория пути смешения Прандтля

Модель турбулентности Прандтля относится к классу алгебраических моделей, т.е. использует алгебраические соотношения, связывающие коэффициент турбулентной вязкости с характеристиками осредненного течения.

Рассмотрим элементарную площадку $d\sigma$, параллельную линии тока осредненного движения, находящуюся на расстоянии l' (рис. 6.4). Через эту площадку проходят линии тока пульсационного течения. В их направлении переносится количество движения смежных слоев, причем скоростью переноса служит поперечная пульсационная скорость.

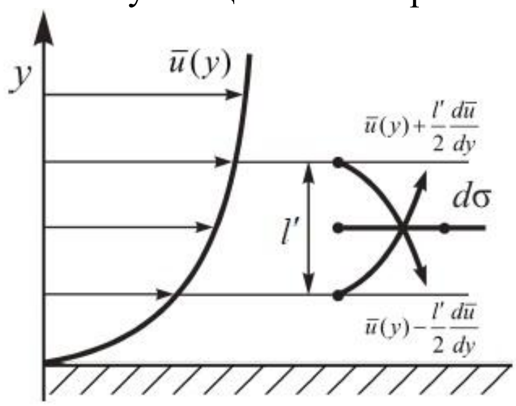

Рис. 6.4 − Схема модели пути смешения по Прандтлю

Касательное напряжение турбулентного трения определим как среднюю во времени проекцию на ось секундного переноса количества осредненного турбулентного движения через площадку, отнесенного к единице площади. Линеаризуя по малому приращению $\frac{l'}{2}$ и усредняя, получим:

$$\tau_t = \rho\overline{v'l'}\frac{d\bar{u}}{dy}. \qquad (6.26)$$

Согласно закону вязкости Ньютона $\Rightarrow$ $\tau = \mu\frac{d\bar{u}}{dy}$ $\Rightarrow$ (6.26) $\Rightarrow$ величину

$$\mu_t = \rho\overline{v'l'} \qquad (6.27)$$

можно трактовать как динамический коэффициент турбулентной вязкости. Тогда его отношение к плотности $\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho}$ $\Rightarrow$ (6.27) $\Rightarrow$

$$\nu_t = \overline{v' l'} \qquad (6.27')$$

можно трактовать как кинематический коэффициент турбулентной вязкости.

Прандтль придал величине l' физический смысл, аналогичный длине свободного пробега молекулы в теории молекулярного обмена, а расстояние от слоя, откуда объем вышел, до слоя, где произошло смешение, назвал путем смешения, отчего теория называется теорией пути смешения Прандтля.

Согласно предположению Прандтля, пульсация скорости v' должна быть пропорциональна разности скоростей между слоями:

$$v' = l' \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}. \qquad (6.28)$$

(6.28) $\rightarrow$ (6.26), проводя осреднение и включая коэффициент пропорциональности в новую величину $l \;\Rightarrow\; \tau_t = \rho l^2 \left|\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}\right| \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y} \;\Rightarrow$

$$\tau_t = \mu_t \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}, \qquad (6.29)$$

где

$$\mu_t = \rho l^2 \left|\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}\right|. \qquad (6.30)$$

Входящую в (6.30) величину l, только пропорциональную ранее введенной величине l' – пути смешения, называют также путем смешения, считая коэффициент пропорциональности входящим в ее определение. В настоящее время считается, что величина l является масштабом турбулентности.

Модель пути смешения позволяет достаточно точно рассчитать характеристики турбулентных течений при использовании эмпирически подобранных зависимостей для пути смешения.

18.3 Характеристики турбулентного пограничного слоя

В полностью турбулентном течении вблизи стенки для длины пути смешения фон Карманом предложена зависимость вида:

$$l = Ky, \qquad (6.31)$$

где y − координата, нормальная к стенке, K − постоянная фон Кармана. (6.31), (6.30) $\rightarrow$ (6.29) $\Rightarrow$

$$\frac{\tau_t}{\rho} = K^2 y^2 \left|\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}\right| \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}. \qquad (6.32)$$

Выберем масштабы длины и скорости: $\tau \sim \rho u^2$ ($[\tau] = [P] = \text{Па}$) и $\mu \sim \rho u y$ ($[\mu] = [Pt] = \text{Па} \cdot \text{с}$). Тогда для скорости потока $\Rightarrow$

$$u_f = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}\,, \tag{6.33}$$

где τ_w − касательное напряжение на стенке. Для координаты, нормальной к стенке $\Rightarrow y_f = \frac{\mu}{\rho u_f} = (6.33) = \frac{\mu}{\rho\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}} \Rightarrow$

$$y_f = \frac{\mu}{\sqrt{\rho\tau_w}}\,. \tag{6.34}$$

Для полностью турбулентного ($\mu \ll \mu_t$) пристеночного слоя постоянного напряжения ($\tau_t = \tau_w$) $\Rightarrow$ (6.32) $\Rightarrow$ $\frac{\tau_w}{\rho} = K^2 y^2 \left|\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}\right| \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}$ $\Rightarrow$ (6.33) $\Rightarrow$

$$K^2 y^2 \left|\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}\right| \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y} = u_f^2\,. \tag{6.35}$$

(6.35) $\Rightarrow$ $u_f = Ky\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}$ $\Rightarrow$ $\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y} = \frac{u_f}{Ky}$ $\Rightarrow$ вводя безразмерные скорость $\tilde{u} = \frac{\bar{u}}{u_f}$ и координату $\tilde{y} = \frac{y}{y_f}$, получим:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\tilde{y}} = \frac{1}{K\tilde{y}}\,. \tag{6.36}$$

$\int(6.36) \Rightarrow$

$$\tilde{u} = \frac{1}{K}\ln\tilde{y} + B\,, \tag{6.37}$$

где B − константа интегрирования. Зависимость (6.37) называется логарифмическим законом стенки, согласно которому в турбулентном слое вблизи стенки продольная скорость имеет логарифмический профиль. Многочисленные экспериментальные проверки логарифмического закона подтверждают его справедливость в пристеночном турбулентном слое. Вычисления постоянных K и B по замеренным профилям скорости дают следующие вероятные значения:

$$K = 0{,}4(\pm 0{,}015),\;\; B = 5(\pm 0{,}25). \tag{6.37′}$$

В области, непосредственно примыкающей к стенке ближе характерного размера самых малых вихрей, турбулентность подавляется, т.е. $\mu_t \to 0$. Следовательно, в этой области профиль скорости определяется молекулярной вязкостью, и для слоя постоянного напряжения близок к линейному. Эта область называется вязкий подслой. Между вязким подслоем и логарифмической зоной существует переходная область. Все эти три области могут быть описаны единообразно путем введения в формулу (6.30) демпфирующего множителя, предложенного Ван Дристом.

Рассмотрим кинематический коэффициент турбулентной вязкости: $\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho} = (6.30) = l^2 \left|\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}\right|$. Тогда с учетом демпфирующего множителя Ван Дриста $D \Rightarrow$

$$\nu_t = Dl^2 \left|\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}\right|. \tag{6.38}$$

Согласно теории демпфирующих множителей Лойцянского, демпфирующий множитель D должен удовлетворять следующим условиям:

1) обеспечивать правильное (соответствующее эксперименту) поведение турбулентной вязкости вблизи стенки: $\left.\frac{\nu_t}{\nu}\right|_{\tilde{y}\to 0} = \alpha \tilde{y}^4$, где $\alpha \ll 1$;

2) расти при удалении от стенки, асимптотически приближаясь к единице, и практически обращаться в единицу при $\tilde{y} > (30-60)$;

3) удовлетворять соотношению:

$$B = \lim\left(\int_0^{\tilde{y}} \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\tilde{y}} D(\tilde{y})\mathrm{d}\tilde{y} - \frac{1}{K}\ln \tilde{y}\right), \tag{6.39}$$

где B и K − константы $(6.37')$ в логарифмическом законе стенки (6.37).

Ван Дрист показал, что требованиям 1) − 3) удовлетворяет демпфирующий множитель вида:

$$D = \left(1 - e^{-\frac{\tilde{y}u_f}{A\nu}}\right)^2, \tag{6.40}$$

где $A = 26$.

Для внешней части турбулентного пограничного слоя фон Карман предложил следующую зависимость длины пути смешения:

$$l = K\frac{\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}}{\frac{\mathrm{d}^2\bar{u}}{\mathrm{d}y^2}}. \tag{6.41}$$

Использование формулы (6.41) также приводит к логарифмическому закону стенки, а постоянная K та же, что и в (6.31), т.е. равна 0,4 согласно $(6.37')$.

В случае применения модели Прандтля для свободных сдвиговых течений, таких как затопленная струя, слой смешения, дальний след, для длины пути смешения вместо (6.31) используют соотношение вида:

$$l = \alpha\delta(x), \tag{6.42}$$

где $\delta(x)$ – характерная локальная толщина сдвиговой зоны поперек потока в зависимости от продольной координаты. Эмпирическая константа α в зависимости от типа течения принимает различные значения:

$$\begin{gathered}\text{дальний след} \Rightarrow \alpha = 0{,}180 \\ \text{слой смешения} \Rightarrow \alpha = 0{,}071 \\ \text{плоская струя} \Rightarrow \alpha = 0{,}098 \\ \text{круглая струя} \Rightarrow \alpha = 0{,}080\end{gathered}. \qquad (6.43)$$

Для двумерного случая на основе теории Прандтля турбулентная вязкость вместо (6.30) определяется как:

$$\mu_t = \rho l^2 \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}y}\right)^2}. \qquad (6.44)$$

18.4 Характеристики турбулентного теплопереноса

Для описания турбулентного теплопереноса необходимо промоделировать турбулентный тепловой поток $\vec{q}_t$ в уравнении (6.22). Аналогом гипотезы Буссинеска (6.24) в данном случае будет определение турбулентного теплового потока (определенного согласно (6.23) как $\vec{q}_t = \overline{\rho c_V \vec{v}'\theta'}$), подобно (1.39), через градиент от осредненного поля температуры с новым эмпирическим коэффициентом:

$$\vec{q}_t = -\lambda_t \mathrm{grad}\theta, \qquad (6.45)$$

где λ_t – коэффициент турбулентной теплопроводности.

Для этого коэффициента, вводя l_θ − аналог длины пути смешения в термических процессах, можно повторить те же рассуждения и выкладки вида (6.26) − (6.30), что и для турбулентной вязкости в модели Прандтля, в результате чего по аналогии с (6.30) получим:

$$\lambda_t = \rho c_p l_\theta^2 \left|\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}\right|, \qquad (6.46)$$

где c_p − удельная теплоемкость среды, l_θ – термическая длина пути смешения. Тогда для коэффициента температуропроводности получим: $a_t = \dfrac{\lambda_t}{\rho c_p} = (6.46) = l_\theta^2 \left|\dfrac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}\right| = (6.30) = l_\theta^2 \dfrac{\mu_t}{\rho l^2} = \left[\nu_t = \dfrac{\mu_t}{\rho}\right] = \nu_t \dfrac{l_\theta^2}{l^2} \Rightarrow$

$$a_t = \nu_t \left(\frac{l_\theta}{l}\right)^2. \qquad (6.47)$$

Т.к. число Прандтля $\mathrm{Pr} = \dfrac{\nu}{a} \Rightarrow \mathrm{Pr}_t = \dfrac{\nu_t}{a_t}$ можно определить как турбулентное число Прандтля. Тогда из (6.47) $\Rightarrow$ квадрат отношения длин смешения можно трактовать как турбулентное число Прандтля:

$$\mathrm{Pr}_t = \left(\frac{l}{l_\theta}\right)^2. \qquad (6.48)$$

(6.48) $\rightarrow$ (6.47) $\Rightarrow$

$$\underbrace{a_t = \frac{1}{\Pr_t}\nu_t}_{1)}, \quad \underbrace{\lambda_t = \frac{1}{\Pr_t}c_p\mu_t}_{2)}. \qquad (6.49)$$

Отметим, что соотношение для турбулентного коэффициента теплопроводности (6.49−2) получено исходя из формулы связи коэффициента теплопроводности с коэффициентом температуропроводности: $\lambda_t = c_p\rho a_t = (6.49-1) = \frac{1}{\Pr_t}c_p\rho\nu_t = \left[\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho}\right] = \frac{1}{\Pr_t}c_p\mu_t$.

Поскольку турбулентное число Прандтля, согласно опытным данным, как правило, близко к единице (равенство длин пути смешения $l = l_\theta$), с помощью (6.49) любая модель турбулентности, позволяющая рассчитать турбулентную вязкость μ_t, дает возможность найти и турбулентную теплопроводность λ_t.

Отметим, что для алгебраических моделей турбулентности, к числу которых относится и модель Прандтля, характерен ряд недостатков. Модели такого рода основаны на закономерностях, характерных для тех или иных канонических течений (пограничный слой, струя, слой смешения), при этом используются нелокальные характеристики этих течений, такие как толщина приграничного слоя, трение на стенке и т.п. В результате они весьма не универсальны и трудно имплементируемы в современные компьютерные коды. Указанные недостатки в значительной мере преодолеваются в так называемых дифференциальных моделях турбулентности, в которых строятся дополнительные дифференциальные уравнения переноса для осредненных пульсационных характеристик, через которые затем выражается коэффициент турбулентной вязкости μ_t в соотношении Буссинеска (6.24).