Лекция 2

1.3 Конститутивные уравнения

Уравнения (1.5) – (1.8) представляют собой фундаментальные законы механики, сформулированные для сплошных сред, и справедливы для любых деформируемых тел: твердых, жидких, газообразных, вязкоупругих. Однако в силу своей универсальности они имеют следующие особенности: а) уравнения не отражают термомеханических свойств тел; б) система уравнений является незамкнутой, и поэтому их недостаточно для описания динамики термомеханических процессов.

Следовательно, эти уравнения надо дополнить некоторыми соотношениями, отражающими свойства тел и замыкающими систему уравнений баланса, – материальными или конститутивными уравнениями.

В уравнениях (1.5) – (1.8) присутствуют два внешних параметра: $\vec{b}$ − массовые силы и Q_V – объемное тепловыделение на единицу массы; при наличии пары уравнений, которые связывали бы T и $\vec{q}$ (тензор напряжений и тепловой поток) с полем скорости $\vec{v}$ и внутренней энергией *e*, система (1.5) – (1.8) была бы замкнутой.

Однако такой подход для практических целей оказывается излишне общим, поскольку нелокальность (чувствительность значений конститутивных функционалов в некоторой точке к величинам их аргументов в соседних точках) ограничивается настолько малой окрестностью, что она вполне может быть учтена через градиенты независимых переменных в рассматриваемой точке.

Это значит, что конститутивные функционалы заменяются функциями, в которых набор аргументов дополнен градиентами независимых переменных.

Кроме того, в этих функциях внутренняя энергия является очень неудобным параметром, поскольку не поддается прямому физическому измерению. Однако существует физическая величина, тесно связанная с внутренней энергией и легко поддающаяся измерению − температура. Следовательно, удобно включить в рассмотрение еще одну переменную – температуру θ. Поскольку общее число переменных увеличилось, надо к двум упомянутым выше конститутивным уравнениям добавить третье, связывающее внутреннюю энергию с температурой и со всеми другими аргументами конститутивных функций.

С учетом изложенного эти три конститутивных уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} T &= \hat{T}\left(\theta, \vec{v}, \mathrm{grad}\theta, \mathrm{grad}\vec{v}\right), \\ \vec{q} &= \hat{\vec{q}}\left(\theta, \vec{v}, \mathrm{grad}\theta, \mathrm{grad}\vec{v}\right), \\ e &= \hat{e}\left(\theta, \vec{v}, \mathrm{grad}\theta, \mathrm{grad}\vec{v}\right). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Обратим внимание, что в данных конститутивных функциях неявно присутствует и их зависимость от плотности ρ.

Если ограничиться рассмотрением класса сред, являющихся жидкостями, и только линейной зависимостью конститутивных функций от градиентов, то из упомянутой выше феноменологической теории конститутивных уравнений однозначно следует, что конститутивные уравнения (1.9) должны иметь следующий вид:

1) для тензора напряжений:

$$T=\left(-p+\xi \mathrm{tr} D\right)I+2\mu D, \tag{1.10}$$

где $D=\frac{1}{2}\left(\mathrm{grad}\vec{v}+\left(\mathrm{grad}\vec{v}\right)^{T}\right)$, I – единичный тензор.

2) для теплового потока:

$$\vec{q}=-\lambda \mathrm{grad}\theta , \tag{1.11}$$

что представляет собой закон теплопроводности Фурье.

3) для внутренней энергии:

$$e=\hat{e}\left(\rho,\theta\right)\approx\hat{e}\left(\theta\right). \tag{1.12}$$

Здесь феноменологические коэффициенты конститутивных уравнений p, ξ, μ и λ зависят от параметров состояния (плотности и температуры) и имеют следующий физический смысл: p – гидравлическое давление, $\left[p\right]=\text{Па}$, ξ – объемная вязкость (дополнительная вязкость, возникающая в сжимаемых жидкостях и газах; проявляется при распространении ударных волн и приводит к дополнительному затуханию), μ – сдвиговая вязкость (внутреннее трение; динамическая вязкость), $\left[\xi\right]=\left[\mu\right]=\text{Па}\cdot\text{с}$, λ – коэффициент теплопроводности, $\left[\lambda\right]=\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$.

Уравнение (1.12) чаще всего употребляется в упрощенной форме (последнее выражение в (1.12)), поскольку для большинства жидкостей зависимость внутренней энергии от давления в наиболее актуальном интервале давлений незначительна.

Из условия устойчивости равновесного состояния функция $p=\hat{p}\left(\rho,\theta\right)$ должна быть такой, что $\dfrac{\partial\hat{p}\left(\rho,\theta\right)}{\partial\rho}>0$ для любых ρ и θ. Таким образом, зависимость $\hat{p}\left(\rho,\theta\right)$ является обратимой, и можно построить обратную $\hat{p}\left(\rho,\theta\right)$ функцию, т.е. $\hat{\rho}\left(p,\theta\right)$:

$$\rho=\hat{\rho}\left(p,\theta\right). \tag{1.13}$$

С помощью (1.13) можно исключить ρ из параметров состояния в феноменологических коэффициентах и перейти к определению состояния через p и θ, так что p становится независимой переменной.

Из требования выполнимости второго начала термодинамики вытекают следующие свойства феноменологических коэффициентов: $\lambda\geq 0$; $\mu\geq 0$; $\xi\geq 0$.

Резюмируя, отметим, что соотношения (1.10) – (1.12) – это конститутивные уравнения, определяющие вязкую теплопроводную жидкость.

§ 2. Система дифференциальных уравнений переноса

2.1 Система дифференциальных уравнений переноса

Рассмотрим некоторые правила дифференцирования тензорных, векторных и скалярных полей.

Для некоторых скалярного поля f и тензорного поля P:

$$\mathrm{div} f = \mathrm{tr}\left(\mathrm{grad} f\right), \tag{1.14}$$

$$\mathrm{div}\left(fP\right) = f\mathrm{div}P + P\mathrm{grad}f\ . \tag{1.15}$$

Из (1.15) для скалярного поля p и единичного тензора $I \Rightarrow$

$$\mathrm{div}\left(pI\right) = \mathrm{grad}p\,. \tag{1.16}$$

Для тензора $D = \frac{1}{2}\left(\mathrm{grad}\vec{v} + \left(\mathrm{grad}\vec{v}\right)^T\right)$:

$$\mathrm{tr}D = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\mathrm{grad}\vec{v} + \left(\mathrm{grad}\vec{v}\right)^T\right) = \mathrm{div}\vec{v}\,, \tag{1.17}$$

$$\mathrm{div}D = \frac{1}{2}\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\vec{v} + \left(\mathrm{grad}\vec{v}\right)^T\right) = \Delta\vec{v} + \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\vec{v}\right). \tag{1.18}$$

Также для единичного тензора I и векторного поля $\vec{v}$:

$$\mathrm{div}\left(I\mathrm{div}\vec{v}\right) = \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\vec{v}\right). \tag{1.19}$$

———————————————

Уравнения переноса получаются подстановкой конститутивных уравнений (1.10) – (1.12) в уравнения баланса (1.5), (1.6), (1.8) (уравнение (1.7) выполняется тождественно в силу свойств конститутивного уравнения (1.10)).

Из (1.12) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial\hat{e}\left(\rho,\theta\right)}{\partial t} \approx \frac{\partial\hat{e}\left(\theta\right)}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}\hat{e}\left(\theta\right)}{\mathrm{d}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial t} \equiv c_V\frac{\partial\theta}{\partial t}\,, \tag{1.20}$$

где $c_V = \frac{\mathrm{d}\hat{e}\left(\theta\right)}{\mathrm{d}\theta}$ − теплоемкость при постоянном объеме.

Подставляя конститутивные уравнения (1.10) – (1.12) в уравнения баланса (1.5), (1.6), (1.8) и используя (1.14) – (1.20), получаем общую форму уравнений переноса:

1) уравнение переноса массы $\Rightarrow$ уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{grad}\rho\cdot\vec{v} + \rho\mathrm{div}\vec{v} = 0\,, \tag{1.21}$$

2) уравнение переноса импульса $\Rightarrow$ уравнение движения (уравнение Навье − Стокса в случае несжимаемой жидкости):

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\mathrm{grad}\vec{v}\cdot\vec{v}\right)=-\mathrm{grad}p+\mathrm{grad}\left(\xi\mathrm{div}\vec{v}\right)+\mathrm{div}\left(\mu\left(\mathrm{grad}\vec{v}+\left(\mathrm{grad}\vec{v}\right)^{T}\right)\right)+\rho\vec{b}, \quad (1.22)$$

3) уравнение переноса внутренней энергии $\Rightarrow$ уравнение теплопереноса:

$$\begin{gathered}\rho c_V\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+\mathrm{grad}\theta\cdot\vec{v}\right)=\mathrm{div}\left(\lambda\mathrm{grad}\theta\right)-p\mathrm{div}\vec{v}+\xi\left(\mathrm{div}\vec{v}\right)^{2}+\\ +\mu\mathrm{tr}\left(\mathrm{grad}\vec{v}\left(\mathrm{grad}\vec{v}+\left(\mathrm{grad}\vec{v}\right)^{T}\right)\right)+\rho Q_V\end{gathered}. \quad (1.23)$$

4) эта система замыкается уравнением состояния (1.13):

$$\rho=\hat{\rho}\left(p,\theta\right). \quad (1.24)$$

Рассмотрим физический смысл некоторых слагаемых, входящих в уравнения переноса (1.22), (1.23).

В уравнении (1.22):

- левая часть представляет собой силу инерции элемента жидкости, отнесенную к единице объема;
- правая часть представляет собой разные виды внешних сил, также отнесенные к единице объема:
    - первый член в правой части – это сила, обусловленная неоднородностью поля давления;
    - второй член – сила, обусловленная объемной вязкостью при сжатии или расширении среды;
    - третий член – сила, обусловленная сдвиговой вязкостью;
    - четвертый член – это сила внешних полей.

В уравнении (1.23):

- левая часть представляет собой скорость изменения внутренней энергии на единицу объема элемента жидкости;
- правая часть представляет собой разные источники этого изменения:
    - первый член в правой части – это скорость теплоподвода к единице объема жидкого элемента за счет теплового потока, обусловленного неоднородностью температуры;
    - второй член – скорость совершения работы силами давления при сжатии или расширении среды;
    - третий член – скорость совершения работы при сжатии или расширении среды силами, обусловленными объемной вязкостью;
    - четвертый член – скорость совершения работы силами, обусловленными сдвиговой вязкостью;
    - пятый член – это внешний объемный источник тепла.

Также в качестве примера рассмотрим вид уравнения состояния (1.24) для случая идеального газа. Исходя из уравнения Клапейрона − Менделеева:

$$pV=\nu R\theta=\frac{m}{M}R\theta\Rightarrow p=\frac{m}{MV}R\theta=\frac{\rho}{M}R\theta\Rightarrow$$

$$\rho = \frac{pM}{R\theta} = \hat{\rho}\left(p,\theta\right). \qquad (1.24')$$

2.2 Частные формы уравнений переноса

1) *Уравнения переноса для случая постоянных коэффициентов и пренебрежимо малой диссипации.*

Данная форма уравнений переноса применима при умеренных вариациях температуры, когда коэффициенты переноса изменяются незначительно, а вклад диссипации в тепловые процессы пренебрежимо мал. Этот случай вытекает из системы уравнений (1.21) – (1.23), если положить в них $\xi, \mu, \lambda = \mathrm{Const}$ и обнулить третий и четвертый члены в правой части (1.23). При этом коэффициенты переноса выносятся из-под дифференциальных операторов, используется соотношение (1.18), а композиция операторов градиента и дивергенции дает оператор Лапласа. В результате получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{grad}\rho\cdot\vec{v} + \rho\mathrm{div}\vec{v} = 0, \qquad (1.25)$$

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = -\mathrm{grad}p + \xi\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\vec{v}\right) + \mu\Delta\vec{v} + \rho\vec{b}, \qquad (1.26)$$

$$\rho c_V\left(\frac{\partial\theta}{\partial t} + \mathrm{grad}\theta\cdot\vec{v}\right) = \lambda\Delta\theta - p\mathrm{div}\vec{v} + \rho Q_V. \qquad (1.27)$$

2) *Уравнения переноса для случая несжимаемой жидкости.*

Несжимаемая жидкость по определению – это жидкость, у которой плотность постоянна. Поэтому в уравнении неразрывности обнуляются все члены, содержащие дифференцирование плотности, и оно сводится к равенству нулю дивергенции от скорости. В результате система (1.25) – (1.27) трансформируется в следующую:

$$\mathrm{div}\vec{v} = 0, \qquad (1.28)$$

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = -\mathrm{grad}p + \mu\Delta\vec{v} + \rho\vec{b}, \qquad (1.29)$$

$$\rho c_V\left(\frac{\partial\theta}{\partial t} + \mathrm{grad}\theta\cdot\vec{v}\right) = \lambda\Delta\theta + \rho Q_V. \qquad (1.30)$$

Уравнение переноса импульса вида (1.29) называется уравнением Навье − Стокса.

3) *Уравнения переноса для идеального газа.*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{grad}\rho\cdot\vec{v} + \rho\mathrm{div}\vec{v} = 0, \qquad (1.31)$$

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = -\mathrm{grad}p + \rho\vec{b}, \qquad (1.32)$$

$$\rho c_V \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathrm{grad}\theta \cdot \vec{v} \right) = -p \mathrm{div} \vec{v} + \rho Q_V . \tag{1.33}$$

$$\rho = \hat{\rho}\left(p, \theta \right). \tag{1.34}$$

Любой из представленных выше вариантов систем уравнений переноса является замкнутой системой дифференциальных уравнений в частных производных и при задании начальных и краевых условий позволяет прогнозировать эволюцию изучаемой системы.