Лекция 3

2.3 Краевые условия

1) *Гидродинамические краевые условия.*

Для уравнения Навье – Стокса могут задаваться как динамические (для поля скорости), так и кинематические (для тензора напряжений) краевые условия.

а) На границе раздела вязкой жидкости с твердой поверхностью S, которая движется со скоростью $\vec{v}_w$, для жидкости принимаются условия прилипания:

$$\vec{v}\big|_S = \vec{v}_w; \text{ при } \vec{v}_w = 0 \text{ (неподвижная стенка) } \vec{v}\big|_S = 0. \qquad (1.35)$$

б) Для свободной границы (жидкость граничит с газом с нулевой вязкостью) задаются краевые условия для тензора напряжений:

$$T\big|_S \vec{n}_S = -p_0 \vec{n}_S, \qquad (1.36)$$

где $\vec{n}_S$ – единичная нормаль к граничной поверхности, направленная в сторону, противоположную от поверхности жидкости.

в) Для идеального газа используются условия непроницаемости (непротекания), требующие равенства нулю нормальной к поверхности компоненты скорости:

$$\vec{v}\big|_S \vec{n}_S = 0. \qquad (1.37)$$

2) *Термические краевые условия.*

На граничной поверхности задаются:

а) температура (граничные условия 1-го рода):

$$\theta\big|_S = \theta_w, \qquad (1.38)$$

б) тепловой поток (граничные условия 2-го рода):

$$-\lambda \operatorname{grad}\theta\big|_S \cdot \vec{n}_S = q_w, \qquad (1.39)$$

в) тепловой поток, определяемый теплообменом между жидкостью и окружающей средой (граничные условия 3-го рода) по закону Ньютона:

$$-\lambda \operatorname{grad}\theta\big|_S \cdot \vec{n}_S = \alpha\left(\theta\big|_S - \theta_0\right) \qquad (1.40)$$

или по закону лучистого теплообмена:

$$-\lambda \operatorname{grad}\theta\big|_S \cdot \vec{n}_S = \sigma\varepsilon\left(\left(\theta\big|_S\right)^4 - \theta_0^4\right), \qquad (1.41)$$

где σ – постоянная Стефана – Больцмана, ε – степень черноты поверхности, α – коэффициент теплообмена жидкости с окружающей средой.

2.4 Уравнения переноса в координатной форме

Представим наиболее широко употребляемый вариант системы уравнений переноса для несжимаемой жидкости с постоянными коэффициентами (1.28) – (1.30) в координатной форме.

1) *В декартовой системе координат* (x, y, z) с координатными ортами $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ дифференциальные операторы представляются как:

$$\mathrm{grad} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\mathrm{div} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \quad . \tag{1.42}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Поэтому для несжимаемой жидкости уравнение Навье − Стокса (1.29) для трех компонент поля скорости v_x, v_y, v_z сводится к следующим трем уравнениям:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) + b_x$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) + b_y\,, \tag{1.43}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) + b_z$$

где $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$ – кинематический коэффициент вязкости, $[\nu] = \dfrac{\text{м}^2}{\text{с}}$.

Уравнение неразрывности (1.28) в декартовой системе координат принимает вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0\,. \tag{1.44}$$

Уравнение теплопереноса (1.30) (с помощью (1.43) и (1.44)) записывается в виде:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_x\frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y\frac{\partial \theta}{\partial y} + v_z\frac{\partial \theta}{\partial z} = a\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right) + \frac{Q_V}{c}\,, \tag{1.45}$$

где величина $a = \dfrac{\lambda}{\rho c}$ – коэффициент температуропроводности, $[a] = \dfrac{\text{м}^2}{\text{с}}$.

Компоненты тензора напряжений (1.10) в этом случае имеют вид:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right);\ i, j = 1,2,3\,. \tag{1.46}$$

Из (1.45) $\Rightarrow$компоненты тензора напряжений T_{xx} и T_{xy}, например, имеют соответственно вид:

$$T_{xy}=T_{i=1,j=1}=-p\delta_{11}+\mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)=\left[\delta_{11}=1\right]= \\ =-p+2\mu\frac{\partial v_1}{\partial x_1}=-p+2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}, \tag{1.46′}$$

$$T_{xy}=T_{i=1,j=2}=-p\delta_{12}+\mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)=\left[\delta_{12}=0\right]= \\ =\mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right). \tag{1.46″}$$

2) *В цилиндрической системе координат* (r,z,φ) учтем, что дифференциальные операторы относительно произвольного скалярного поля f имеют вид:

$$\vec{v}\nabla f=v_r\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial f}{\partial\varphi}+v_z\frac{\partial f}{\partial z} \\ \Delta f=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}-v_z\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \tag{1.47}$$

Из (1.47) $\Rightarrow$ уравнение Навье − Стокса (1.29) для трех компонент поля скорости v_r, v_φ, v_z сводится к трем уравнениям:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}+\left(\vec{v}\nabla\right)v_r-\frac{v_\varphi^2}{2}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\Delta v_r-\frac{v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right)+b_r \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+\left(\vec{v}\nabla\right)v_\varphi+\frac{v_r v_\varphi}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\varphi}+\nu\left(\Delta v_\varphi-\frac{v_\varphi}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}\right)+b_\varphi. \\ \frac{\partial v_z}{\partial t}+\left(\vec{v}\nabla\right)v_z=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\Delta v_z+b_z \tag{1.48}$$

Уравнение неразрывности (1.28) и уравнение теплопереноса (1.30) соответственно принимают вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rv_r\right)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0, \tag{1.49}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\left(\vec{v}\nabla\right)\theta=a\Delta\theta+\frac{Q_V}{c}. \tag{1.50}$$

Компоненты тензора напряжений относительно цилиндрической системы координат с учетом свойств δ-символа Кронекера записываются следующим образом:

$$T_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r};\ T_{\varphi\varphi} = -p + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r}\right);\ T_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z};$$

$$T_{r\varphi} = T_{\varphi r} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right);\ T_{zr} = T_{rz} = \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right); \quad . \quad (1.51)$$

$$T_{z\varphi} = T_{\varphi z} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right)$$