

Раздел 2. Базовые поля течений вязкой жидкости

В этом разделе рассматриваются течения вязкой несжимаемой жидкости с постоянными материальными коэффициентами.

Наша задача – отыскать в этом случае точные решения уравнений гидродинамики.

Поскольку уравнения гидродинамики являются нелинейными даже при постоянных коэффициентах в силу того, что скорость в инерционных членах уравнений входит квадратично, точных их решений сравнительно мало. Поэтому важно найти эти решения, что обусловлено тем, что они а) лежат в основе многих экспериментальных методик для определения материальных параметров жидкости; б) представляют собой набор базовых течений, которые присутствуют в технологических процессах; в) являются начальными приближениями для различных методов решения.

По форме математической задачи точные решения можно разделить на два типа: а) с выпадением в уравнениях нелинейных членов в силу специфической геометрии задачи; б) с сохранением нелинейных членов. Также различают два типа точных решений по форме представления: а) решения выражаются в элементарных функциях; б) решения выражаются специальными функциями, построенными на основе обыкновенных дифференциальных уравнений, получаемых с помощью автомодельной переменной из уравнений гидродинамики.

§ 4. Слоистые течения

4.1 Слоистые течения

Характерный признак слоистого течения – наличие только одной, отличной от нуля компоненты скорости. Это значит, что все частички жидкости движутся по траекториям, повторяющим одну из координатных линий.

Проанализируем характерные свойства слоистых течений.

1) *В декартовой системе координат.*

Рассмотрим в этой системе координат в отсутствие внешних сил слоистое течение, в котором отлична от нуля только x -компонента скорости:

$$v_x \equiv U \neq 0, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0. \quad (2.1)$$

Тогда из уравнения неразрывности в декартовых координатах (1.44) \Rightarrow

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \Rightarrow U = U(y, z, t). \quad (2.2)$$

С учетом (2.1) из уравнения Навье – Стокса в декартовых координатах (1.43)
 $\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \Rightarrow p = p(x, t)$. Конвективные члены в первом из уравнений

(1.43) выпадают, поскольку в силу (2.1) $\Rightarrow U \frac{\partial U}{\partial x} + \underbrace{v_y}_0 \frac{\partial U}{\partial y} + \underbrace{v_z}_0 \frac{\partial U}{\partial z} = 0$. После

преобразования из (1.43) следует уравнение для слоистых течений в данном случае:

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right). \quad (2.3)$$

Если продифференцировать уравнение (2.3) по x , то в силу (2.2) получим:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \text{Const}. \quad (2.4)$$

2) В цилиндрических координатах уравнения для слоистых течений получаются аналогичным образом из (1.48):

а) течение вдоль координатных линий z :

$$v_z \equiv U \neq 0, \quad \rho \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \text{Const}. \quad (2.5)$$

а) течение вдоль координатных линий φ :

$$v_\varphi \equiv u \neq 0, \quad \rho \frac{u^2}{2} = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{u^2}{r} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0. \quad (2.6)$$

4.2 Течение Пуазейля – Куэтта

1) Рассмотрим стационарное слоистое течение, описываемое уравнением (2.3), в геометрии, показанной на рис. 2.1, т.е. в зазоре между двумя неподвижными плоскими поверхностями, заполненными жидкостью. Единственная отличная от нуля компонента скорости направлена вдоль оси x , также направлен и градиент давления.

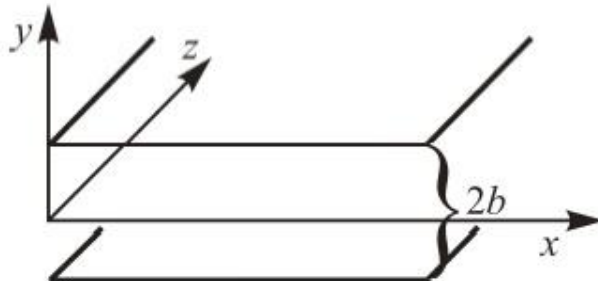


Рис. 2.1 – Геометрия задачи и система координат для плоского течения Пуазейля

Будем рассматривать стационарную задачу. Вдоль z все параметры считаем одинаковыми, поэтому скорость U от z не зависит. Следовательно, из (2.3) имеем:

$$\frac{dp(x)}{dx} = \mu \frac{d^2U(y)}{dy^2}. \quad (2.7)$$

Поскольку градиент давления согласно (2.4) постоянен, то зависимость $p(x)$

можно представить в линейном виде $p(x) = \frac{dp(x)}{dx}x$ или

$$\frac{dp(x)}{dx} = \frac{p(L) - p(0)}{L} = \frac{\Delta p}{L}, \text{ где } L - \text{длина канала.}$$

Граничные условия (1.30) на стенках канала в данном случае принимают вид:

$$U|_{y=b} = U|_{y=-b} = 0. \quad (2.8)$$

В результате интегрирования (2.7) с граничным условием (2.8) получим поле скорости для плоского течения Пуазейля:

$$U(y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (b^2 - y^2) = -\frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{L} (b^2 - y^2). \quad (2.9)$$

Такое поле скорости называется плоским течением Пуазейля и применяется для описания ламинарного течения в плоских прямоугольных каналах, в которых один поперечный размер много больше другого.

2) Рассмотрим другой случай в подобной геометрии, но при этом начало системы координат разместим на нижней стенке зазора (рис. 2.2).

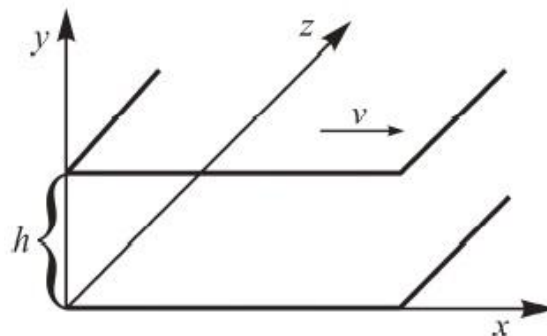


Рис. 2.2 – Геометрия задачи и система координат для течения Пуазейля – Куэтта

В данном случае градиент давления направлен так же, но верхняя стенка канала может двигаться вдоль оси x со скоростью v . Тогда уравнение (2.7) остается в силе, а граничные условия трансформируются:

$$U|_{y=0} = 0, \quad U|_{y=h} = v. \quad (2.10)$$

Интегрирование (2.7) с граничными условиями (2.10) дает поле скорости:

$$\text{течение Пуазейля – Куэтта} \Rightarrow U(y) = \frac{y}{h}v - \frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right), \quad (2.11)$$

$$\text{течение Куэтта} \Rightarrow U(y) = \frac{y}{h}v. \quad (2.11')$$

Это течение при отсутствии градиента давления $\frac{dp}{dx} = 0$ называется течением

Куэтта, а при его наличии $\frac{dp}{dx} \neq 0$ – течением Пуазейля – Куэтта.

На рис. 2.3 представлено семейство профилей скорости в этом течении для различных градиентов давления.

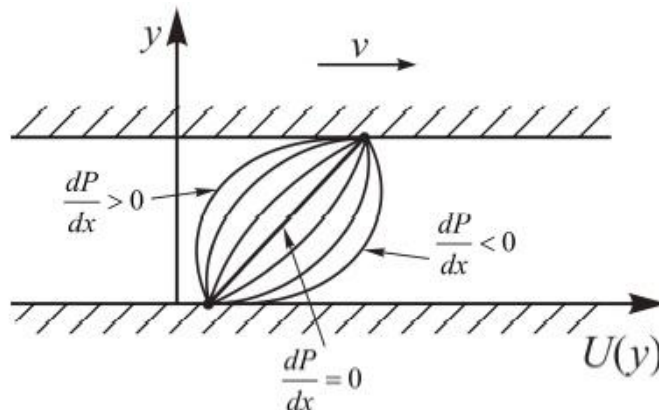


Рис. 2.3 – Профили скорости в течении Пуазейля – Куэтта

Прямая линия на графике соответствует течению Куэтта, а кривые слева и справа – течению Пуазейля – Куэтта. Случаю сонаправленной с направлением движения результирующей силы, действующей на элементарный объем жидкости и обусловленной градиентом давления, соответствуют кривые справа от прямой. Случаю противоположного направления этой силы – кривые слева от прямой.

Таким образом, во втором случае существуют режимы, в которых есть область возвратного течения жидкости (например, крайний левый профиль скорости на рис. 2.3). Следовательно, возможен такой режим, когда при наличии течения, результирующий расход жидкости через канал будет равен нулю. Рассчитать параметры такого режима можно, проинтегрировав профиль скорости (2.11) по высоте зазора и приравняв его к нулю. Из полученного соотношения находим связь между скоростью верхней стенки и градиентом давления, обеспечивающую режим с нулевым расходом:

$$v = \frac{h^2}{6\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (2.11'')$$

4.3 Течение Хагена – Пуазейля в трубе

На рис. 2.4 показана геометрия течения и представлена также используемая система координат.

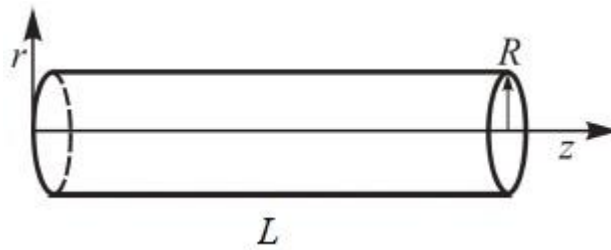


Рис. 2.4 – Геометрия задачи и система координат для течения Хагена – Пуазейля

В этой геометрии рассмотрим слоистое течение с единственной отличной от нуля z -компонентой скорости $v_z \equiv U \neq 0$. При стационарном течении из (2.5) в этом случае \Rightarrow

$$\mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) = \frac{dp}{dz}, \quad \frac{dp}{dz} = \text{Const}. \quad (2.12)$$

Граничные условия:

$$U|_{r=R} = 0, \quad U|_{r=0} < \infty. \quad (2.13)$$

Интегрирование (2.12) с граничными условиями (2.13) дает:

$$\text{течение Хагена – Пуазейля} \Rightarrow U(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (R^2 - r^2) = \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{L} (R^2 - r^2). \quad (2.14)$$

Можно найти скорость на оси трубы U_{\max} , положив в (2.14) $r=0$:

$$U_{\max} = \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p R^2}{L}. \quad (2.14')$$

Интегрируя распределение (2.14) по сечению трубы, найдем объемный расход жидкости G , $[G] = \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$:

$$G = \int_0^R U(r) 2\pi r dr = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L}. \quad (2.15)$$

Это формула Хагена – Пуазейля.

Используя формулу Хагена – Пуазейля (2.15), можно также найти среднюю по сечению скорость в трубе $U_{\text{cp}} = \frac{G}{\pi r^2}$:

$$U_{\text{cp}} = \frac{R^2 \Delta p}{8\mu L} \Rightarrow (2.14') \Rightarrow U_{\text{cp}} = \frac{U_{\max}}{2}. \quad (2.14'')$$

Формула Хагена – Пуазейля используется также *при определении вязкости капиллярным вискозиметром*. Метод капиллярной вискозиметрии заключается в измерении объемного расхода жидкости G через тонкий капилляр при заданном перепаде давлений Δp . Зная геометрические параметры капилляра, можно вычислить вязкость, исходя из (2.15):

$$\mu = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8GL}. \quad (2.15')$$