

§ 5. Слоистые течения в движущихся системах

5.1 Установившееся течение между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами

Рассмотрим геометрию, показанную на рис. 2.5. Зазор между двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами r_1 и r_2 заполнен жидкостью. Вдоль оси z все параметры постоянны и течение отсутствует. Цилиндры вращаются с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 для внутреннего и внешнего цилиндров соответственно.

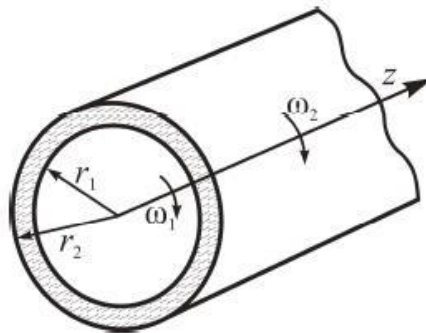


Рис. 2.5 – Геометрия задачи и система координат для течения между вращающимися цилиндрами

Очевидно, что имеем слоистое течение с одной отличной от нуля компонентой скорости v_φ . Из (2.6) в стационарном случае \Rightarrow

$$v_\varphi \equiv u = u(r) \neq 0, \quad \rho \frac{u^2}{2} = \frac{dp}{dr}, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) - \frac{u^2}{r} = 0, \quad \frac{dp}{d\varphi} = 0. \quad (2.16)$$

Граничные условия для (2.16):

$$u(r) \Big|_{r=r_1} = \omega_1 r_1, \quad u(r) \Big|_{r=r_2} = \omega_2 r_2. \quad (2.17)$$

Общее решение предпоследнего уравнения в (2.16) имеет вид:

$$u(r) = C_1 r + C_2 \frac{1}{r}. \quad (2.18)$$

Находя C_1 и C_2 с помощью граничных условий (2.17), получаем решение для поля скорости в данной задаче \Rightarrow (2.18) \Rightarrow

$$u(r) = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \left(r (\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2) - \frac{r_1^2 r_2^2}{r} (\omega_2 - \omega_1) \right). \quad (2.19)$$

Для малых зазоров между цилиндрами, когда параметр $\xi \equiv \frac{r_2 - r_1}{r_2} \ll 1$, выражение (2.19) можно линеаризовать по ξ и показать, что оно сводится к течению Пуазейля – Куэтта (2.11) при $v = 0$.

Рассмотрим практически важную задачу, какой крутящий момент нужно приложить к внешнему цилиндру длиной h при неподвижном внутреннем, чтобы он вращался с заданной угловой скоростью?

Если определить касательную силу, приложенную к единице площади поверхности цилиндра со стороны жидкости в направлении координатной линии φ (напряжение), то этот момент легко рассчитывается как произведение напряжения на площадь цилиндра и плечо силы, т.е. r_2 . Указанное касательное напряжение есть не что иное, как компонента $T_{r\varphi}$ тензора напряжений T . Поэтому искомый момент выражается как:

$$M_2 = \left(T_{r\varphi} \Big|_{r=r_2} \right) 2\pi r_2 h r_2. \quad (2.20)$$

Из (1.51) $\Rightarrow T_{r\varphi} = \mu \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right) \Rightarrow$ из (2.20) с учетом (2.19) при $\omega_1 = 0 \Rightarrow$

$$M_2 = 2\pi\mu h \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \omega_2. \quad (2.21)$$

Такое же выражение получится, если рассмотреть крутящий момент, приложенный со стороны жидкости к неподвижному внутреннему цилиндру. Это равенство моментов вытекает также из общих законов баланса моментов в механике.

Из найденного решения можно также вывести частный случай для одного цилиндра, вращающегося в заполненном покоящейся жидкостью пространстве. Для этого достаточно положить $\omega_2 = 0$ и совершить предельный переход при $r_2 \rightarrow \infty$. В результате для поля скорости и для момента, действующего на цилиндр, можно соответственно записать:

$$u = \frac{r_1^2 \omega_1}{r}, \quad M_1 = 2\pi\mu h r_1^2 \omega_1. \quad (2.21')$$

Полученные решения имеют важные практические применения. Например, на их основе строится теория смазки, в которой рассчитываются потери на трение и несущая сила подшипников скольжения. В отличие от рассмотренного здесь идеализированного случая в этой теории цилиндры (вал и обойма подшипника) не являются соосными и имеют небольшой эксцентриситет, хотя оси их остаются параллельными. Тогда за счет перераспределения поля давления в зазоре в его узкой части возникает несущая сила, приложенная к валу, что и обеспечивает работу подшипника. Задача о течении в таком подшипнике может решаться методами теории возмущений, где нулевым (невозмущенным) приближением является рассмотренная здесь осесимметричная задача.

Другой важный практический аспект найденного решения – использование его в *методе ротационной вискозиметрии*. Простейший ротационный вискозиметр представляет собой цилиндрическую емкость с приводом для вращения, в которой соосно с ней с маленьким зазором между стенками расположен неподвижный цилиндр с датчиком крутящего момента, приложенного к нему. Емкость, включая зазор между цилиндрами,

заполняется исследуемой жидкостью и приводится во вращение с фиксированной угловой скоростью ω . В установившемся режиме измеряется приложенный к внутреннему цилиндру крутящий момент M . По этим данным и геометрическим параметрам вискозиметра из (2.21) вычисляется вязкость исследуемой жидкости:

$$\mu = \frac{M(r_2^2 - r_1^2)}{2\pi h r_1^2 r_2^2 \omega}. \quad (2.21')$$

5.2 Неустойчивость Тейлора

В рассмотренной задаче о течении между коаксиальными цилиндрами имеется существенное отличие для двух режимов течения: 1) с неподвижным внутренним цилиндром и 2) с неподвижным внешним. Данное отличие обусловлено различным характером центробежных сил, действующих на частицы жидкости при их движении по круговым траекториям в зазоре и стремящихся прижать частицы к внешнему цилиндру.

В режиме 1) эти силы убывают по мере удаления от поверхности внешнего цилиндра, т. е. при движении против сил инерции. Процесс можно сравнить с жидкостью в поле силы тяжести со слоями различной плотности, убывающей с высотой. Такая жидкость является абсолютно устойчивой, поскольку, если в результате возмущения частица жидкости из верхнего слоя смещается вниз и попадает в более плотные слои, по законам плавучести она стремится всплыть и восстановить равновесие. Аналогично, если возмущение сместит ее вверх, то она попадет в более легкие слои, и будет тонуть снова, восстанавливая равновесное состояние.

В режиме 2) инерционные силы, наоборот, возрастают по мере удаления от поверхности внешнего цилиндра. Здесь аналогом будет жидкость в поле тяжести со слоями, плотность которых растет с высотой. Такая ситуация является неустойчивой, поскольку при любом смещении частицы жидкости вверх или вниз силы плавучести будут провоцировать ее дальнейшее движение в том же направлении. Из этих рассуждений следует, что во втором режиме течения, когда вращается внутренний цилиндр, могут появиться неустойчивости, приводящие к перестройке поля течения.

Тейлор показал, что существует критическая скорость вращения цилиндра, выше которой одномерное слоистое течение перестраивается и в поперечном сечении зазора (вдоль оси цилиндров) появляется система парных тороидальных вихрей, вращающихся в противоположных направлениях (рис. 2.6). При этом эти вихри по мере дальнейшего роста скорости вращения после их возникновения претерпевают новые бифуркации, приводящие к появлению новых структур. Именно по причине возможности возникновения неустойчивости Тейлора в ротационном вискозиметре используется вращение только наружного цилиндра.

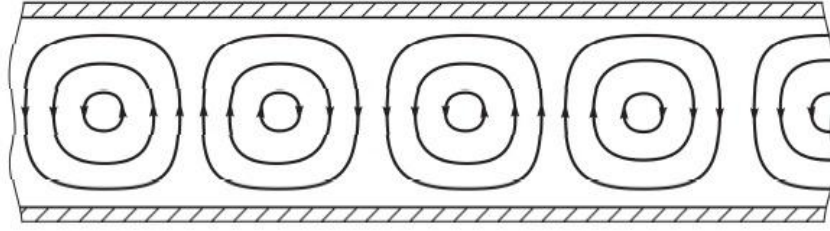


Рис. 2.6 – Вихри Тейлора

5.3 Плоская стенка в жидкости, внезапно приведенная в движение

Пусть полупространство, заполненное вязкой жидкостью, ограничено плоской твердой стенкой (рис. 2.7).

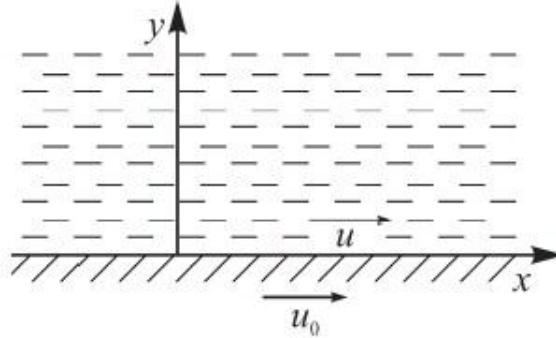


Рис. 2.7 – Геометрия задачи и система координат в случае плоской стенки в жидкости, внезапно приведенной в движение

До начального момента времени и жидкость, и стенка покоились, а в момент $t_0 = 0$ стенка начала двигаться вдоль своей плоскости со скоростью u_0 . Уравнение для слоистых течений (2.3) в этом случае сводится к виду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2.22)$$

а начальные и краевые условия записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} t < 0: u(t, y)|_{y \in [0, \infty)} &= 0 \\ t \geq 0: u(t, y)|_{y=0} &= u_0, \quad u(t, y)|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Введем автомодельную переменную $\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$, и будем искать решение в виде $u = u_0 f(\eta)$. В результате (2.22) трансформируется в:

$$f'' + 2\eta f' = 0, \quad (2.24)$$

а краевые условия (2.23) – в:

$$f|_{\eta=0} = 1, \quad f|_{\eta \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (2.25)$$

Общее решение уравнения (2.24) имеет вид $f = C_1 + C_2 \int e^{-\xi^2} d\xi$. Учет граничных условий (2.25) позволяет найти константы решения уравнения (2.24), которые не определены.

Напомним, что неэлементарная функция вида $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$ называется функцией ошибок (функцией Лапласа или интегралом вероятности), а неэлементарная функция вида $\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$ – дополнительной функцией ошибок.

Таким образом, в результате получаем решение задачи, выраженное через дополнительную функцию ошибок автомодельной переменной

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{vt}} :$$

$$u(y) = u_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{y}{2\sqrt{vt}}} e^{-\xi^2} d\xi \right) = u_0 \text{erfc} \left(\frac{y}{2\sqrt{vt}} \right) = u_0 \text{erfc}(\eta). \quad (2.24')$$

Профили функции $f(\eta) = \frac{u}{u_0}$ и скорости u показаны на рис. 2.8.

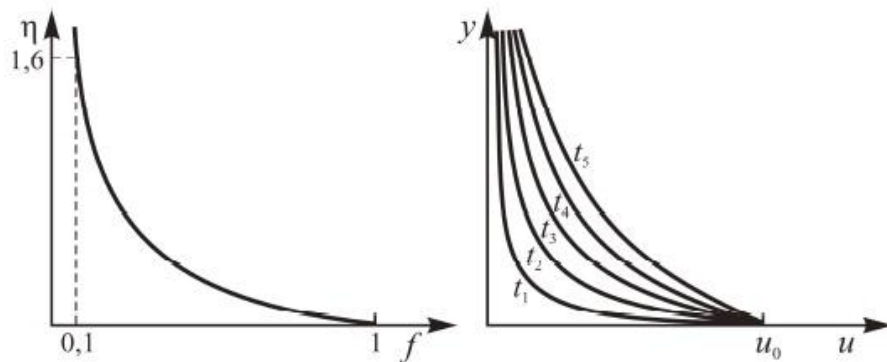


Рис. 2.8 – Профили автомодельной функции $f(\eta)$ и скорости u

Как видно из рисунка, при $\eta = 1,6$ имеем $u = 0,1u_0$. Обозначим через δ толщину слоя жидкости, прилегающей к стенке, которая пришла в движение вследствие движения стенки. Границей этого слоя условно примем значение координаты y в точке, где $u = 0,1u_0$, что означает, что внутри слоя толщиной δ теряется 90% скорости жидкости, пришедшей в движение вследствие движения стенки. Из сказанного выше следует, что $\eta = 1,6 = \frac{\delta}{2\sqrt{vt}}$. Тогда

$$\delta = 3,2\sqrt{vt} \approx \sqrt{t}.$$

Таким образом, толщина слоя жидкости, пришедшего в движение вместе с пластиной, растет пропорционально корню квадратному от времени.