

§ 6. Неслоистые течения

6.1 Плоское течение вблизи критической точки

Рассмотрим тело, расположенное в набегающем на него потоке (рис. 2.9). Для определенности будем считать течение плоским, т.е. тело, изображенное на рисунке, является протяженным и перпендикулярным плоскости рисунка.

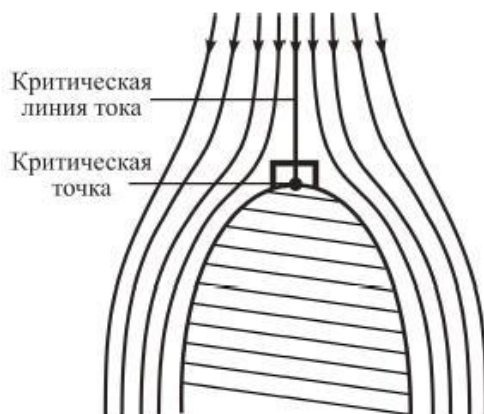


Рис. 2.9 – Критическая точка

Видно, что тело искривляет линии тока и поток разделяется на две половины, обтекающие тело справа и слева. При этом всегда существует пограничная линия тока, которая делит поток на эти половины и не уходит ни вправо, ни влево, а упирается в вершину тела. Такая линия тока называется критической, а точка, в которую она упирается, – критической точкой. Если рассмотреть малую окрестность критической точки (например, ограниченную прямоугольником на рис. 2.9), то кривизной поверхности тела можно пренебречь и рассмотреть задачу о течении в этой окрестности в упрощенной постановке (рис. 2.10).

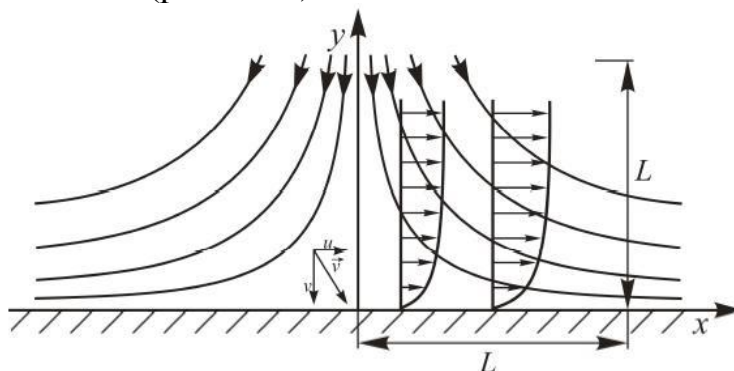


Рис. 2.10 – Геометрия задачи и система координат для плоского течения вблизи критической точки

Плоский поток набегаёт из бесконечности на плоскую стенку, разделяясь на две половины и уходя вправо и влево. Начало декартовой системы координат расположено в критической точке, как показано на рисунке.

Поскольку поток плоский и, следовательно, z -компонента скорости равна нулю, то уравнения гидродинамики (1.43), (1.44) для x -компоненты $V_x \equiv u$ и y -компоненты $V_y \equiv v$ скорости \vec{V} в стационарном случае примут вид:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2.26)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.28)$$

6.2 Функция тока

Введем так называемую функцию тока ψ , определяемую следующими соотношениями:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.29)$$

(2.29) \rightarrow (2.28) \Rightarrow введение функции тока ψ эквивалентно тому, что уравнение неразрывности (2.28) выполняется тождественно.

$$\frac{\partial(2.27)}{\partial y} - \frac{\partial(2.26)}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \quad (2.30)$$

Таким образом, с помощью введения функции тока достигаются следующие преимущества: 1) система из трех уравнений сводится к одному уравнению; 2) функция ψ имеет удобный физический смысл – ее изолинии являются линиями тока.

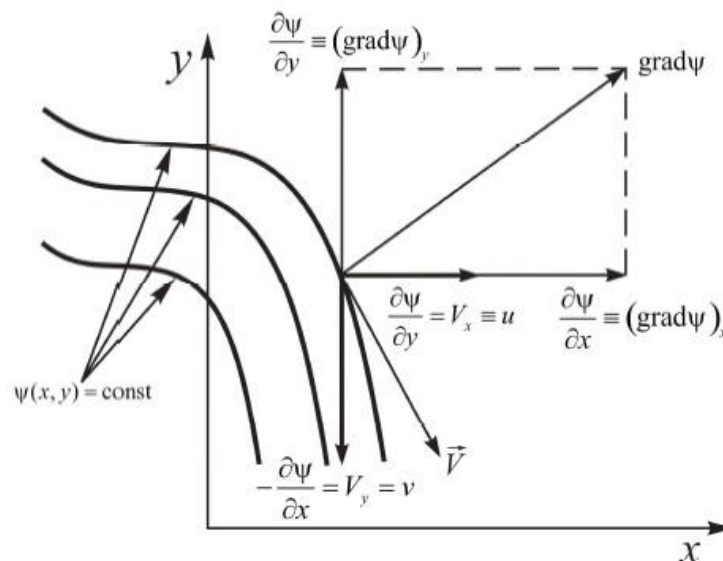


Рис. 2.11 – Физический смысл функции тока

Поясним последнее утверждение. Пусть функция тока $\psi(x, y)$ известна. Рассмотрим семейство ее изолиний, т. е. линий равного значения этой функции, и градиент функции тока в некоторой точке на ее изолинии (рис. 2.11).

Как известно, вектор градиента функции указывает направление ее скорейшего возрастания и, следовательно, перпендикулярен к ее изолинии. На рис. 2.11 показан этот вектор и его компоненты, а также компоненты вектора скорости. Скалярное произведение вектора скорости на вектор градиента функции тока выражается, как видно из рисунка, следующим образом:

$$\vec{V} \cdot \text{grad}\psi = V_x (\text{grad}\psi)_x + V_y (\text{grad}\psi)_y = \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \Rightarrow \vec{V} \perp \text{grad}\psi. \quad (2.29')$$

(2.29') $\Rightarrow \vec{V} \perp \text{grad}\psi \Rightarrow$ вектор скорости в каждой точке изолинии функции тока является касательным к ней, поскольку он перпендикулярен вектору $\text{grad}\psi$, являющемуся перпендикуляром к этой линии. Иными словами, изолинии функции тока описывают траектории частиц жидкости для данного поля скорости, т. е. являются линиями тока. Отсюда происходит название функции ψ .

Можно также показать, что разность значений функции тока для двух изолиний равна расходу потока жидкости, заключенного между этими линиями тока.

Отметим, что введение функции тока является стандартным приемом при решении двумерных задач для несжимаемой жидкости. Это позволяет упростить постановку задачи и ее решение, а также дает возможность наглядного представления результатов.

6.3 Решение задачи о плоском течении вблизи критической точки

Если в уравнениях Навье – Стокса в декартовых координатах вида (2.26), (2.27) перейти от вязкой жидкости к идеальной, т.е. положить $\mu = 0$, то получившаяся таким образом из (2.26) – (2.28) система уравнений будет иметь следующее решение:

$$\underbrace{\psi = axy}_{1),} \quad \underbrace{u = ax}_{2),} \quad \underbrace{v = -ay}_{3),} \quad \underbrace{p = p_0 - \frac{\rho a^2}{2}(x^2 + y^2)}_{4),} \quad (2.31)$$

где $a = \text{Const}$ – некоторая постоянная, характеризующая интенсивность течения.

Линии тока течения, описываемого решением (2.31), полностью аналогичны картине течения на рис. 2.9. В самом деле, построим семейство изолиний функции тока (2.31–1), положив левую часть этого соотношения равной константе: $\psi = \text{Const} = C = axy$. Из данного соотношения следует, что

семейство линий тока в этом течении описывается уравнением: $y = \frac{C}{ax}$, в

котором каждому значению константы C соответствует своя траектория. Как видим, траектории частиц жидкости или линии тока являются гиперболами, что соответствует картине течения на рис. 2.9. На бесконечном расстоянии от стенки $\frac{u}{v} \rightarrow 0$, т. е. линии тока параллельны оси y , что тоже соответствует картине плоскопараллельного потока в невозмущенном состоянии.

(2.31–3) \Rightarrow скорость v зависит от координаты y линейно \Rightarrow для константы интенсивности потока из (2.31–3) \Rightarrow

$$a = -\frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.32)$$

Сформулируем краевые условия на бесконечности для исходной задачи (2.26) – (2.28) аналогично тому, какими они являются в решении (2.31). Для заданной a положим, что при $y \rightarrow \infty$ также справедливо соотношение (2.32)

$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow -a$. Добавляя к этому стандартные условия прилипания (1.35) для

вязкой жидкости на стенке и задавая значение давления в критической точке $(0,0)$, получаем следующие краевые условия для системы (2.26) – (2.28):

$$\underbrace{u|_{y=0} = 0}_1, \quad \underbrace{v|_{y=0} = 0}_2, \quad \underbrace{p|_{x=0, y=0} = p_0}_3, \quad \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow -a}_4. \quad (2.33)$$

В терминах функции тока $\psi \Rightarrow (2.29) \rightarrow (2.33) \Rightarrow$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}|_{y=0} = 0, \quad p|_{x=0, y=0} = p_0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow a. \quad (2.34)$$

Будем искать решение в предположении, что, как и в (2.31–1), ψ зависит от x линейно:

$$\psi = xf(y). \quad (2.35)$$

(2.35) \rightarrow (2.29) \Rightarrow

$$v = -f(y), \quad u = xf'(y). \quad (2.36)$$

Решение для p будем искать в виде, аналогичном (2.31–4):

$$p - p_0 = \frac{\rho a^2}{2} (x^2 + F(y)). \quad (2.37)$$

(2.35) \rightarrow (2.30) \Rightarrow

$$f'^2 - ff'' = a^2 vf'''. \quad (2.38)$$

Если необходимо также найти поле давления, то после решения уравнения (2.37) его можно восстановить по уравнению, получаемому при (2.36) \rightarrow (2.27):

$$ff' = \frac{a^2 F'}{2} - vf''. \quad (2.39)$$

(2.34) и (2.35), (2.37) \Rightarrow граничные условия для (2.38), (2.39) в терминах функций f и F :

$$f|_{y=0} = 0, \quad f'|_{y=0} = 0, \quad F|_{y=0} = p_0, \quad f'|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow a. \quad (2.40)$$

Преобразуем систему так, чтобы исключить параметры a и v из (2.38), (2.39). Введем произвольные параметры α и A и определим новую автомодельную переменную η и новую функцию этой переменной $\varphi(\eta)$:

$$\eta = \alpha y, \quad f(y) = A\varphi(\eta) \Rightarrow \varphi(\eta) = \frac{1}{A} f\left(\frac{\eta}{\alpha}\right). \quad (2.41)$$

(2.41) \rightarrow (2.38) \Rightarrow

$$\alpha^2 A^2 (\varphi'^2 - \varphi\varphi'') = a^2 + vA\alpha^3 \varphi'''. \quad (2.42)$$

Пользуясь произвольностью α и A , потребуем, чтобы все коэффициенты в (2.42) были одинаковы и равны $a^2 \Rightarrow$ (2.42) \Rightarrow

$$\alpha^2 A^2 = a^2, \quad vA\alpha^3 = a^2. \quad (2.42')$$

(2.42') \Rightarrow

$$\alpha = \sqrt{\frac{a}{v}}, \quad A = \sqrt{va}. \quad (2.43)$$

(2.43) \rightarrow (2.42) \Rightarrow

$$\varphi''' + \varphi\varphi'' - \varphi^2 + 1 = 0. \quad (2.44)$$

(2.41) с учетом (2.43) \Rightarrow граничные условия (2.40) примут вид:

$$\varphi|_{\eta=0} = 0, \quad \varphi'|_{\eta=0} = 0, \quad \varphi'|_{\eta \rightarrow \infty} \rightarrow 1. \quad (2.45)$$

(2.43) \rightarrow (2.41) \Rightarrow

$$\eta = \sqrt{\frac{a}{v}} y, \quad f(y) = \sqrt{va} \varphi(\eta). \quad (2.46)$$

Краевая задача (2.44), (2.45) может быть решена (например, в виде рядов Тейлора), и специальная функция $\varphi(\eta)$ автомодельной переменной η и ее производная – найдены в явном виде.

Тогда функция тока и поля скоростей при (2.46) \rightarrow (2.35) и (2.46) \rightarrow (2.36) имеют вид:

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= x\sqrt{va}\varphi\left(\sqrt{\frac{a}{v}}y\right), \\ v(y) &= -\sqrt{va}\varphi\left(\sqrt{\frac{a}{v}}y\right), \quad u(x, y) = xa\varphi'\left(\sqrt{\frac{a}{v}}y\right). \end{aligned} \quad (2.47)$$

На рис. 2.12 приведены профили функций $\varphi(\eta)$ и $\varphi'(\eta)$, которые, связаны с компонентами скорости по (2.47).

При этом кривая $\varphi'(\eta)$, начиная со значения $\eta = 2,4$, менее чем на 1% отличается от своего асимптотического значения, равного единице. Это означает, что продольная к стенке компонента скорости претерпевает полное изменение в пределах ограниченного пристеночного слоя, а вне его остается практически постоянной.

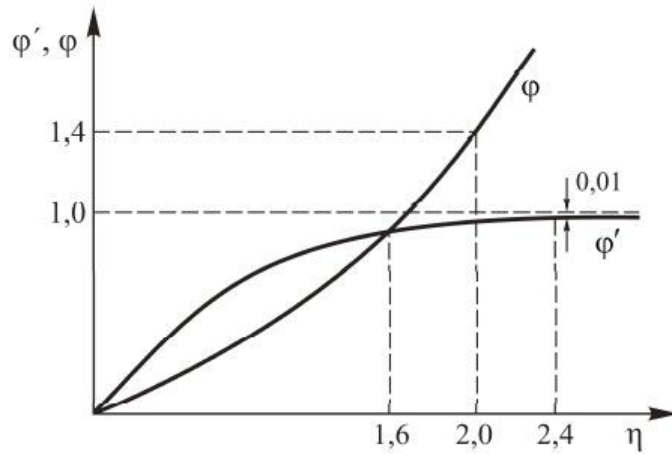


Рис. 2.12 – Автономные кривые

Как видно из рисунка 2.12 и соотношений (2.47), профиль поперечной к стенке компоненты скорости, начиная с этого же значения $\eta = 2,4$, становится линейным, т.е. $\frac{\partial v}{\partial y} = -a$. Следовательно, условие (2.33–4), которое ставилось на бесконечности, начинает выполняться с достаточной точностью уже за пределами указанного пристеночного слоя.

Из (2.46) для толщины слоя $y = \delta$, в котором $u = 0,99u_\infty$, \Rightarrow

$$\eta = 2,4 = \sqrt{\frac{a}{v}} \delta \Rightarrow$$

$$\delta = 2,4 \sqrt{\frac{v}{a}}. \quad (2.48)$$

Выберем вблизи критической точки объем конечного размера L такой, что $L \ll \delta$, тогда с учетом (2.31–3) с достаточной точностью можно считать, что $v \ll -ay$. Полагая, что поперечная скорость при $y = L$ равна v_0 , можно найти a :

$$a = \frac{v_0}{L}. \quad (2.49)$$

(2.49) \rightarrow (2.48) \Rightarrow

$$\delta = 2,4 \sqrt{\frac{vL}{v_0}} = 2,4L \sqrt{\frac{v}{v_0L}} \Rightarrow \delta = 2,4L \sqrt{\frac{1}{\text{Re}}}. \quad (2.50)$$

Таким образом, толщина пристеночного слоя обратно пропорциональна Re и не зависит от x . Этот факт отражает общие гидродинамические закономерности, которые будут далее рассмотрены в теории пограничного слоя.