

§ 10. Уравнения свободно-конвективного переноса

10.1 Уравнения Буссинеска для свободно-конвективного теплообмена

Существует обширный класс явлений конвективного теплообмена, в которых само наличие теплообмена является причиной течения среды.

Такая ситуация имеет место, если рассматриваемая система находится в поле массовых сил.

Если система однородна, то массовая сила также однородна и компенсируется однородным градиентом гидростатического давления, так что система остается в неподвижном равновесии. При возникновении неоднородности температуры в силу теплового расширения образуется неоднородность плотности, а, следовательно, и неоднородность массовой силы, которая, как правило, не может быть скомпенсирована градиентом давления, а значит, должна привести к появлению течения. Проще говоря, более нагретые и менее плотные слои жидкости всплывают вверх, а более холодные опускаются. Возникающее течение, в свою очередь, модифицирует перенос тепла и, таким образом, наблюдается процесс, в котором оба явления – теплообмен и течение взаимосвязаны. Такие процессы называют свободной конвекцией или естественной конвекцией.

В отличие от других задач конвективного переноса в задачах свободно-конвективного теплопереноса нельзя решить гидродинамическую задачу отдельно от тепловой, как, например, в п. 9.1, а затем найденное поле скорости использовать в уравнении теплопереноса. Здесь обе задачи взаимосвязаны и их необходимо решать совместно.

Полная система уравнений конвективного переноса (1.21) – (1.24) описывает и свободно-конвективный перенос, поскольку учитывает эффекты сжимаемости и в уравнении (1.22) содержится член, определяющий массовую силу.

Однако такая система слишком сложна для решения и, кроме того, ее необязательно решать в полном виде, поскольку для большинства практически важных задач она может быть сведена к более простому виду в приближенной формулировке практически без потери точности.

Это приближение – приближение Буссинеска основано на том, что относительная величина вариаций плотности в свободно-конвективных течениях невелика и кинематика данных течений может описываться на основе соответствующего аппарата для несжимаемых жидкостей.

Запишем полную систему уравнений переноса (1.21) – (1.24):

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \text{grad} \rho \cdot \vec{v} + \text{div} \vec{v} = 0, \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{\lambda}{\rho} \text{grad}(\text{div} \vec{v}) + \nu \Delta v + \vec{g}, \quad (4.18)$$

$$\rho c_v \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{grad} \theta \cdot \vec{v} \right) = \lambda \Delta \theta - p \text{div} \vec{v}, \quad (4.19)$$

$$\rho = \hat{\rho}(p, \theta). \quad (4.20)$$

Как было отмечено выше, вывод приближения Буссинеска основывается на предположении о том, что $\frac{\Delta \rho}{\rho} \ll 1$. Это означает, что в уравнении (4.17) первые два члена можно отбросить, а сжимаемость учитывать только в члене, отвечающем за силовые параметры (подчеркнут в (4.18)), и в уравнении состояния (4.20).

Поскольку движущей силой конвективных течений являются изменения плотности и они малы, разложим уравнение (4.20) в ряд Тейлора около равновесных значений p_{eq}, θ_{eq} , ограничившись только линейными членами

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{\rho}(p, \theta) &= \hat{\rho}(p_{eq}, \theta_{eq}) + \frac{\partial \hat{\rho}(p_{eq}, \theta_{eq})}{\partial \theta} (\theta - \theta_{eq}) + \frac{\partial \hat{\rho}(p_{eq}, \theta_{eq})}{\partial p} (p - p_{eq}) + \dots \Rightarrow \\ \hat{\rho}(p, \theta) &= \rho_{eq} \left(1 - \beta (\theta - \theta_{eq}) + \beta_p (p - p_{eq}) \right), \end{aligned} \quad (4.21)$$

где

$$\rho_{eq} = \hat{\rho}(p_{eq}, \theta_{eq}), \quad \beta = -\frac{1}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \theta} \Big|_{p=p_{eq}, \theta=\theta_{eq}}, \quad \beta_p = \frac{1}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial p} \Big|_{p=p_{eq}, \theta=\theta_{eq}}. \quad (4.21')$$

Величина β называется температурным коэффициентом объемного расширения, $[\beta] = \text{K}^{-1}$.

Рассмотрим все параметры как их равновесные значения плюс малые добавки $\Rightarrow \theta = \theta_{eq} + \theta', p = p_{eq} + p', \rho = \rho_{eq} + \rho'$. Здесь p_{eq} не постоянно, а равно гидростатическому давлению.

Интегрируя (4.18) в равновесном состоянии $\vec{v} = 0$, получим:

$$p_{eq}(\vec{x}) = p_0 + \rho_{cp} \vec{g} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0). \quad (4.22)$$

Если h есть характерный вертикальный размер (вдоль \vec{g}) \Rightarrow (4.22) \Rightarrow характерный перепад давлений $\Rightarrow \delta p = \rho_{cp} g h \Rightarrow$ (4.21') \Rightarrow этот перепад приведет к изменению плотности $\Rightarrow \delta \rho_p = \beta_p \rho_{cp}^2 g h \Rightarrow$

$$\frac{\delta \rho_p}{\rho_{cp}} = \beta_p \rho_{cp} g h. \quad (4.23')$$

С другой стороны \Rightarrow (4.21') \Rightarrow вариации температуры $\Delta \theta$ являются причиной изменения плотности $\Rightarrow \delta \rho_\theta = \beta \rho_{cp} \Delta \theta \Rightarrow$

$$\frac{\delta \rho_\theta}{\rho_{cp}} = \beta \Delta \theta. \quad (4.23'')$$

Поскольку $\beta \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1}$ (газы) и $\beta \approx 0,5 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1}$ (жидкости), а $\beta_p \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{Па}^{-1}$ (газы) и $\beta_p \approx 0,5 \cdot 10^{-5} \text{Па}^{-1}$ (жидкости), то нетрудно убедиться, что при умеренных перепадах температуры \Rightarrow (4.23'), (4.23'') \Rightarrow

$$\frac{\delta \rho_p}{\rho_{cp}} \approx \frac{\delta \rho_\theta}{\rho_{cp}} \approx 1. \quad (4.23)$$

(4.23) \Rightarrow в (4.21) последний член в скобках можно опустить \Rightarrow

$$\rho = \rho_{cp} (1 - \beta \theta'). \quad (4.24)$$

Таким образом, в силу неравенства (4.23), как и было отмечено ранее, в уравнениях (4.17) – (4.19) будем учитывать изменения плотности только в силовом члене (подчеркнут), в остальных жидкость рассматриваем как несжимаемую. Тогда уравнения (4.17) – (4.19) принимают вид:

$$\text{div} \vec{v} = 0, \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} = - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta v + \vec{g}, \quad (4.26)$$

$$\rho c_v \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{grad} \theta \cdot \vec{v} \right) = \lambda \Delta \theta. \quad (4.27)$$

Рассмотрим подчеркнутый член в (4.26), линеаризуя его по $\beta \theta' \Rightarrow$

$$\frac{1}{\rho} \text{grad} p = \left[p = p_{eq} + p' \right] = \frac{\text{grad} (p_{eq} + p')}{\rho} = (4.22) = \frac{\text{grad} (p_0 + \rho_{cp} \vec{g} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + p')}{\rho} =$$

$$= (4.24) = \frac{\text{grad} (p_0 + \rho_{cp} \vec{g} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + p')}{\rho_{cp} (1 - \beta \theta')} = \frac{\rho_{cp} \vec{g} + \text{grad} p'}{\rho_{cp} (1 - \beta \theta')} = \vec{g} + \frac{\text{grad} p'}{\rho_{cp}} + \vec{g} \beta \theta'. \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\rho} \text{grad} p = \vec{g} + \frac{\text{grad} p'}{\rho_{cp}} + \vec{g} \beta \theta' \quad (4.28')$$

(4.28') \rightarrow (4.26) \Rightarrow

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} = - \frac{1}{\rho_{cp}} \text{grad} p' + \nu \Delta v - \vec{g} \beta \theta'. \quad (4.28)$$

Система (4.25), (4.27), (4.28) и есть система уравнений свободно-конвективного переноса в приближении Буссинеска. Из нее явным образом видно, что уравнения взаимосвязаны, поскольку в уравнение для скорости (4.28) входит температура, а в уравнение для температуры (4.27) – скорость. Поэтому эти уравнения требуют совместного решения.

10.2 Критерии подобия для свободно-конвективного теплообмена

Обезразмерим систему (4.25), (4.27), (4.28). Пусть заданы характерный размер L и характерный перепад температуры $\Delta \theta = \theta_1 - \theta_0$. Построим остальные характерные значения по параметрам задачи:

- $U = \frac{v}{L}$ – характерная скорость;
- $P = \rho_{cp} U^2$ – характерное давление;
- $\tau = \frac{L^2}{\nu}$ – кинематическое характерное время.

Обезразмеривая стандартным образом, получим связь размерных и безразмерных (с тильдой) параметров и операторов:

$$\tilde{v} = \frac{\vec{v}}{U}, \quad \tilde{x} = \frac{\vec{x}}{L}, \quad \tilde{\theta} = \frac{\theta - \theta_0}{\Delta\theta}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \tilde{p} = \frac{p'}{P}, \quad (4.29)$$

$$\text{grad} = L\text{grad}, \quad \text{div} = L\text{div}, \quad \Delta = L^2\Delta$$

(4.29) \rightarrow (4.25), (4.27), (4.28) \Rightarrow безразмерная система уравнений свободно-конвективного переноса:

$$\text{div}\tilde{v} = 0, \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{t}} + \text{grad}\tilde{v} \cdot \tilde{v} = -\text{grad}\tilde{p} + \Delta\tilde{v} - \text{Gr} \frac{\vec{g}}{g} \tilde{\theta}, \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\tilde{t}} + \text{grad}\tilde{\theta} \cdot \tilde{v} = \text{Pr} \Delta\tilde{\theta}. \quad (4.32)$$

Здесь все размерные параметры, входящие в уравнение (4.31), образовали безразмерный комплекс, определяющий процесс подобия теплообмена при конвекции в поле тяжести, называемый критерием Грасгофа \Rightarrow п. 3.3 \Rightarrow

$$\text{Gr} = \frac{\beta g \Delta\theta L^3}{\nu^2}. \quad (4.33)$$

Если на границах задан тепловой поток q_w , а не перепад температуры \Rightarrow п. 3.3 \Rightarrow критерий Грасгофа модифицируется:

$$\text{Gr} = \frac{\beta g q_w L^4}{\nu^2 \lambda}. \quad (4.33')$$

Также используется критерий подобия, определяющий поведение жидкости под воздействием градиента температуры – число Рэлея \Rightarrow п. 3.3 \Rightarrow

$$\text{Ra} = \text{GrPr} = \frac{\beta g \Delta\theta L^3}{\nu a} \quad (4.33'')$$

либо

$$\text{Ra} = \text{GrPr} = \frac{\beta g q_w L^4}{\nu \lambda a}. \quad (4.33''')$$