

§ 11. Уравнения конвективного теплопереноса в каналах

Обширным классом задач теории конвективного теплообмена являются задачи внутреннего теплообмена. К ним принадлежат процессы конвективного теплопереноса жидкости, движущейся в канале.

Рассмотрим лишь небольшой круг наиболее важных задач данного типа. Прежде всего, ограничимся изучением прямолинейных каналов круглого сечения, т.е. труб. Второе ограничение – исследование теплообмена на участке развитого гидродинамического течения.

Понятие развитого течения связано с начальным участком течения – зоны, прилегающей к входному концу трубы, в которой происходит перестройка формы профиля скорости от, как правило, плоского во входном сечении трубы, до параболического профиля Пуазейля (2.14). Эта перестройка схематично показана на рис. 4.1, и понять ее можно из представления о пограничном слое в пристеночной зоне входного участка, в котором наблюдается переход профиля скорости от нулевого значения на стенке до однородного в ядре потока.

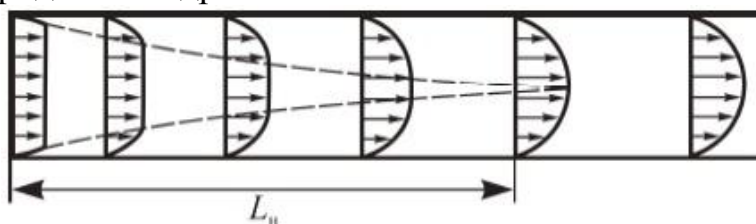


Рис. 4.1 – Формирование развитого течения

Толщина этого пограничного слоя по мере удаления от края трубы растет до тех пор, пока его граница, имеющая форму кольца в каждом сечении, не сомкнется на оси трубы на некотором расстоянии от входа. Примерно в этом месте и формируется пуазейлев профиль скорости, который далее вниз по потоку уже не меняется, т.е. формируется развитое течение.

Таким образом, участок развитого течения – это и есть та зона, где профиль скорости уже сформировался и далее остается неизменным.

Из решения задачи о течении в круглой полуограниченной трубе известно, что длина начального участка, на котором происходит формирование развитого течения в данном случае (рис 4.1), определяется с помощью соотношения $L_n = 0,057d Re$, где d – диаметр трубы. Диапазон характерных чисел Рейнольдса для ламинарных течений известен: $Re_{\text{лам}} = 10 \div 2000$. Отсюда видно, что длина начального участка лежит в пределах $L_n = 5,7d \div 114d$. Таким образом, т.к. область развитого течения – это область вне начального участка, из приведенных оценок следует, что в большинстве практически важных случаев начальный участок занимает относительно малую часть длины трубы и их можно рассматривать в предположении развитого течения.

Рассмотрим уравнения конвективного теплообмена в круглой трубе в области развитого течения в цилиндрической системе координат при условии азимутальной симметрии и стационарного течения. Полная система уравнений переноса (1.21), (1.24) для этой геометрии записывается согласно (2.5), (1.50) \Rightarrow в случае стационарного течения имеет вид:

$$\mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \text{Const}, \quad u = u(z), \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial z} = a \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right). \quad (4.35)$$

Уравнение (4.34) так же, как и в теории пограничного слоя, может решаться отдельно от уравнения (4.35). Таким образом, его решение уже получено выше – это профиль Пуазейля, который в случае течения Хагена – Пуазейля в трубе имеет вид (2.14):

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{L} (R^2 - r^2). \quad (4.36)$$

При этом объемный расход жидкости G и средняя по сечению скорость в трубе $\bar{u} = \frac{G}{\pi r^2}$ выражаются согласно (2.15) и (2.14'') \Rightarrow

$$G = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L}, \quad \bar{u} = \frac{R^2 \Delta p}{8\mu L}. \quad (4.37)$$

Введем безразмерные переменные $\tilde{\theta} = \frac{\theta - \theta_1}{\Delta \theta}$, $\tilde{r} = \frac{r}{R}$, $\tilde{z} = \frac{z}{L}$, $\tilde{t} = \frac{ta}{R^2}$ и безразмерные параметры $l = \frac{L}{2R}$ и критерий Гретца (см. п. 3.3.)

$Gz = \text{Pe}l = \frac{2R\bar{u}}{a} \frac{L}{2R} = \frac{\bar{u}L}{a} \Rightarrow$ расчет этих параметров с учетом (4.36), (4.37) и дальнейшее рассмотрение (4.35) в безразмерном виде \Rightarrow

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{t}} + \left(2Gz(1 - \tilde{r}^2) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}} - \frac{4}{l^2} \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}^2} \right) = \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(r \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{r}} \right). \quad (4.38)$$

Поскольку в типичных случаях для порядков безразмерных параметров в (4.38) имеет место $Gz \gg 1$ и $\frac{1}{l^2} \ll 10^{-2} \div 10^{-5}$, то вторым слагаемым в скобках по сравнению с первым можно пренебречь, и уравнение (4.38) сводится к виду:

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{t}} + 2Gz(1 - \tilde{r}^2) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}} = \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(r \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{r}} \right). \quad (4.39)$$

Физически это означает, что малым кондуктивным переносом тепла вдоль трубы пренебрегается по сравнению с большим конвективным переносом. Подобный прием использовался и при выводе уравнения теплового пограничного слоя. Уравнение (4.39) – это уравнение конвективного переноса в круглых каналах.

Отметим, что, возвращаясь к размерным переменным, с учетом (4.37), из (4.39) в стационарном случае получим:

$$2\rho c_p \bar{u} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (4.40)$$

Уравнение (4.40) – это уравнение конвективного переноса в круглых каналах в размерном виде в стационарном случае.

Раздел 5. Задачи конвективного теплообмена

§ 12. Конвективный теплообмен при обтекании плоской пластины

Рассмотрим полубесконечную пластину, обтекаемую плоскопараллельным потоком вдоль ее плоскости (рис. 5.1), в геометрической и в гидродинамической постановке, такой же, как и в п. 8.1.

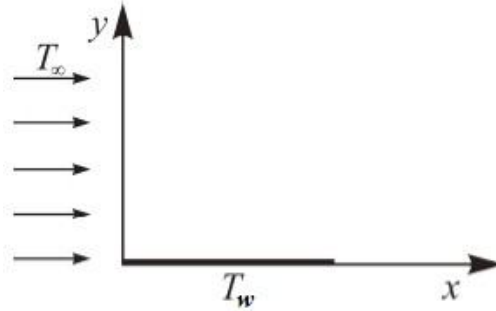


Рис. 5.1 – Геометрия задачи о конвективном теплообмене при обтекании плоской пластины

Отличие от задачи, рассмотренной в п. 8.1, состоит в том, что ситуация неизотермична: набегающий поток имеет температуру T_∞ , а поверхность пластины поддерживается при температуре T_w . Таким образом, мы рассматриваем задачу внешнего конвективного теплообмена, которая решается на основе безразмерной системы уравнений теплового пограничного слоя (4.1), (4.2), (4.5):

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (5.2)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \quad (5.3)$$

Здесь и ниже одноименные размерные и безразмерные переменные отличаются наличием тильды у размерных.

Решение для задачи гидродинамического пограничного слоя (5.1), (5.2) рассмотрено в п. 8.1. Оно выражается через автомодельную переменную η

$$\Rightarrow (3.16-2) \Rightarrow \eta = \tilde{y} \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu \tilde{x}}} \Rightarrow$$

$$\eta = y \sqrt{\frac{u_\infty L}{\nu x}}. \quad (5.4)$$

При этом поля скорости в безразмерном виде $u = \frac{\tilde{u}}{u_\infty}$ и $v = \frac{\tilde{v}}{u_\infty}$ выражаются через специальную функцию f , которая является решением дифференциального уравнения (3.22) при граничных условиях (3.23) \Rightarrow (3.20), (3.21) \Rightarrow

$$u = f'(\eta)$$

$$v = \frac{u_\infty}{2} \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x L}} (\eta f'(\eta) - f(\eta)) \quad (5.4')$$

Рассмотрим уравнение теплового пограничного слоя (5.3), записанное для безразмерной температуры $\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$. Т.к. при $y = 0 \Rightarrow T = T_w$, а при $y = \infty \Rightarrow T = T_\infty$, то граничные условия в данной задаче имеют вид:

$$\theta|_{y=0} = 1, \quad \theta|_{y=\infty} = 0. \quad (5.5')$$

Ищем решение этого уравнения через ту же автомодельную переменную η (5.4), что и для гидродинамического пограничного слоя \Rightarrow

$$\theta = \theta(\eta). \quad (5.5'')$$

(5.5'') \rightarrow (5.3) \Rightarrow

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \frac{\text{Pr}}{2} f \frac{d\theta}{d\eta} = 0. \quad (5.5)$$

Из интегрирования (5.5) \Rightarrow

$$\theta(\eta) = \theta_1(\eta, \text{Pr}) = \frac{\int_0^\eta e^{-\frac{\text{Pr}}{2} \int_\xi^\infty f(\alpha) d\alpha} d\xi}{\int_0^\infty e^{-\frac{\text{Pr}}{2} \int_\xi^\infty f(\alpha) d\alpha} d\xi}. \quad (5.6')$$

Для вычисления теплового потока на стенке найдем производную $\left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} \Rightarrow$

(5.6') \Rightarrow

$$\left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} = - \frac{e^{-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^\infty f(\alpha) d\alpha}}{\int_0^\infty e^{-\frac{\text{Pr}}{2} \int_\xi^\infty f(\alpha) d\alpha} d\xi} \equiv a_1(\text{Pr}). \quad (5.6'')$$

В диапазоне значений критерия Прандтля $0,6 < \text{Pr} < 10$, соответствующих большинству газов и жидкостей кроме жидких металлов, для функции $a_1(\text{Pr})$ Польгаузенем найдена аналитическая аппроксимация:

$$a_1(\text{Pr}) = 0,332 \sqrt[3]{\text{Pr}}. \quad (5.6''')$$

Вычислим согласно закону Фурье удельный тепловой поток на стенке:

$$q_w(x) = -\lambda \frac{d\theta(x, y)}{dy} \Big|_{y=0} = (5.4) = -\lambda \frac{d\theta \left(y \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \right)}{dy} \Big|_{y=0} = -\lambda \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} (T_\infty - T_w) \frac{d\theta}{d\eta} \Big|_{\eta=0} \Rightarrow$$

(5.6''), (5.6''') \Rightarrow

$$q_w(x) = 0,332 \sqrt[3]{\text{Pr} \lambda} \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} (T_w - T_\infty). \quad (5.6)$$

Отсюда найдем локальное число Нуссельта, выбирая в качестве характерного размера расстояние от передней кромки пластины до текущей

точки $\Rightarrow \text{Nu}_x = \frac{q_w x}{(T_w - T_\infty) \lambda} \Rightarrow (5.6) \Rightarrow$ с учетом $\text{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu} \Rightarrow$

$$\text{Nu}_x = 0,332 \sqrt[3]{\text{Pr}} \sqrt{\text{Re}_x}. \quad (5.7)$$

Для пластины конечных размеров, выбранных так же, как на рис. 3.5, вычислим полный тепловой поток, интегрируя (5.6) по площади пластины:

$$Q = b \int_0^l q_w(x) dx = (5.6) = 0,332 \sqrt[3]{\text{Pr} \lambda} b \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} (T_w - T_\infty) \int_0^l \frac{1}{\sqrt{x}} dx \Rightarrow$$

$$Q = 0,664 \sqrt[3]{\text{Pr} \lambda} b \sqrt{\frac{u_\infty l}{\nu}} (T_w - T_\infty). \quad (5.8')$$

Тогда среднее число Нуссельта $\Rightarrow \text{Nu}_{\text{cp}} = \frac{ql}{(T_w - T_\infty) \lambda} = \frac{Q}{lb (T_w - T_\infty) \lambda} \Rightarrow (5.8')$

\Rightarrow с учетом $\text{Re} = \frac{u_\infty l}{\nu} \Rightarrow$

$$\text{Nu}_{\text{cp}} = 0,664 \sqrt[3]{\text{Pr}} \sqrt{\text{Re}}. \quad (5.8)$$

Соотношение (5.8) используется для практических расчетов интенсивности теплообмена на поверхностях с внешним обдувом.

Аналогичные критериальные зависимости можно получить при решении других задач теплообмена. Так расчет теплоотдачи при поперечном обтекании одиночного цилиндра жидкостью можно проводить по формуле вида:

$$\text{Nu}_{\text{cp}} = 0,25 \text{Pr}^{0,4} \text{Re}^{0,6}, \quad (5.8'')$$

а при обтекании воздухом:

$$\text{Nu}_{\text{cp}} = 0,22 \text{Re}^{0,6}. \quad (5.8''')$$