

§ 13. Свободно-конвективный теплообмен около вертикальной пластины

13.1 Задача о свободно-конвективном теплообмене около вертикальной пластины

Рассмотрим вертикальную полубесконечную пластину, ограниченную снизу и погруженную в жидкую среду, занимающую все пространство (рис. 5.2).

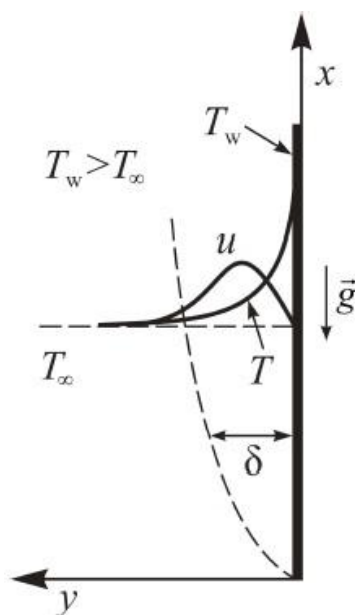


Рис. 5.2 – Геометрия задачи свободно-конвективного теплообмена около вертикальной пластины

Температура жидкости вдали от пластины – T_∞ , температура на ее поверхности – T_w . Система находится в поле силы тяжести, а плотность жидкости уменьшается с ростом температуры. Как описывалось в п. 10.1, при данных условиях около пластины должно возникнуть свободно-конвективное течение, и теплообмен с ней будет формироваться этим явлением.

Полная система уравнений свободно-конвективного переноса в приближении Буссинеска (4.25), (4.27), (4.28) в данной геометрии для стационарного случая имеет вид:

$$(4.28) \text{ для } u \Rightarrow u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_{cp}} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + (T - T_\infty) \beta g, \quad (5.9)$$

$$(4.28) \text{ для } v \Rightarrow u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_{cp}} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (5.10)$$

$$(4.25) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (5.11)$$

$$(4.27) \Rightarrow u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (5.12)$$

В данном случае также справедливо приближение пограничного слоя. Используя, как и в п. 7.2 и п. 9.1, оценки порядка входящих в уравнения членов, можно показать, что в приближении пограничного слоя $p' = \text{Const}$, уравнение (5.10) исчезает (оно $\propto \delta$), а в уравнениях (5.9), (5.12) исчезают вторые производные по x . В результате данных оценок (5.9) – (5.12) сводится к виду:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (T - T_\infty) \beta g, \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (5.14)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (5.15)$$

Граничные условия для данной задачи имеют вид:

$$u|_{y=0} = v|_{y=0} = 0, \quad T|_{y=0} = T_w, \quad T|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow T_\infty. \quad (5.16)$$

13.2 Решение Польгаузена

Введем, как и в п. 8.1, функцию тока (3.17):

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5.17)$$

При этом уравнение (5.14) выполняется тождественно, а (5.17) \rightarrow (5.13), (5.15) \Rightarrow

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = v \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}, \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (5.19)$$

(5.17) \rightarrow (5.16) \Rightarrow граничные условия:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{y=0} = 0, \quad T|_{y=0} = T_w, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow T_\infty. \quad (5.20)$$

Польгаузен ввел автомодельную переменную η , позволяющую упростить уравнения (5.18), (5.19) \Rightarrow

$$\underbrace{\eta \equiv Cy^4 \sqrt{x}}_1, \quad \underbrace{C = \sqrt[4]{\frac{\beta g (T_w - T_\infty)}{4\nu^2}}}_2. \quad (5.21)$$

Исходя из этого, решение ищем через некоторые автомодельные функции $f(\eta)$ и $\theta(\eta)$ автомодельной переменной η в виде:

$$\begin{aligned} \text{для функции тока} &\Rightarrow \underbrace{\psi = 4C\sqrt[4]{x^3} f(\eta)}_{1)} \\ \text{для перепада температур} &\Rightarrow \underbrace{T - T_\infty = (T_w - T_\infty)\theta(\eta)}_{2)}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

(5.22) \rightarrow (5.18), (5.19) \Rightarrow задача сводится к системе уравнений:

$$f''' + 3ff'' - 2(f')^2 + \theta = 0, \quad (5.23)$$

$$\theta'' + 3Pr f\theta' = 0. \quad (5.24)$$

(5.22) \rightarrow (5.20) \Rightarrow граничные условия:

$$f|_{\eta=0} = f'|_{\eta=0} = 0, \quad f'|_{\eta \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \theta|_{\eta=0} = 1, \quad \theta|_{\eta \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (5.25)$$

Краевая задача (5.23) – (5.25) может быть решена, например, в виде рядов Тейлора, и, таким образом, найдены специальные функции $f(\eta)$ и $\theta(\eta)$, а также производная $f'(\eta)$. Однако в отличие от ранее рассмотренных случаев здесь система взаимосвязана и обе функции зависят от числа Прандтля Pr , т.е. $f = f(\eta, Pr)$ и $\theta = \theta(\eta, Pr)$. Это означает, что при различных числах Прандтля вид решения будет различным.

Рассмотрим достаточно распространенный случай свободно-конвективного теплообмена около нагретой вертикальной пластины, находящейся в воздухе (или других двухатомных газах). При этом критерий Прандтля $Pr = 0,73$. Тогда функции $f(\eta)$ и $\theta(\eta)$ имеют вид, показанный на рис. 5.3.

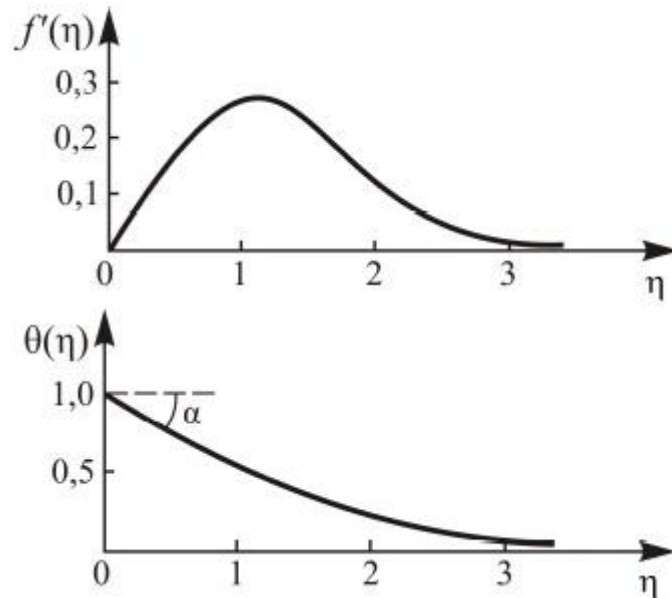


Рис. 5.3 – Распределения скоростей и температур около нагретой вертикальной пластины

Заметим, что наклон касательной к кривой $\theta(\eta)$ в точке $\eta = 0$ определяется соотношением:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\theta'|_{\eta=0} = 0,508. \quad (5.26)$$

Определим тепловой поток на высоте $x = h$ от нижней кромки пластины:

$$\begin{aligned}
q(h) &= -\lambda \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = (5.22 - 2) = -\lambda(T_w - T_\infty) \left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} \frac{C}{\sqrt[4]{h}} = (5.26) = 0,508\lambda(T_w - T_\infty) \frac{C}{\sqrt[4]{h}} = \\
&= (5.21 - 2) = 0,508\lambda(T_w - T_\infty) \frac{\sqrt[4]{\frac{\beta g (T_w - T_\infty)}{4\nu^2}}}{\sqrt[4]{h}} = 0,359 \sqrt[4]{\frac{\beta g (T_w - T_\infty) h^3}{\nu^2}} \frac{\lambda(T_w - T_\infty)}{h} \\
&\Rightarrow \text{локальное число Грасгофа} \Rightarrow \text{Gr}_x = \frac{\beta g (T_w - T_\infty) x^3}{\nu^2} \Rightarrow \\
q(h) &= 0,359 \sqrt[4]{\text{Gr}_h} \frac{\lambda(T_w - T_\infty)}{h}, \tag{5.27'}
\end{aligned}$$

где Gr_h – локальное число Грасгофа на расстоянии h от нижней кромки пластины.

Отсюда определим локальное число Нуссельта, выбирая в качестве характерного размера расстояние h от нижней кромки пластины \Rightarrow

$$\begin{aligned}
\text{Nu}_h &= \frac{q(h)h}{\lambda(T_w - T_\infty)} \Rightarrow (5.27') \Rightarrow \\
\text{Nu}_h &= 0,359 \sqrt[4]{\text{Gr}_h}. \tag{5.27}
\end{aligned}$$

Для пластины конечных размеров, выбранных так же, как на рис. 3.5, вычислим полный тепловой поток, интегрируя (5.27') по площади пластины:

$$\begin{aligned}
Q &= b \int_0^l q(h) dh = (5.27') = 0,359 b \sqrt[4]{\frac{\beta g (T_w - T_\infty)}{\nu^2}} \lambda(T_w - T_\infty) \int_0^l \frac{dh}{\sqrt[4]{h}} = 0,359 b \sqrt[4]{\frac{\beta g (T_w - T_\infty)}{\nu^2}} \cdot \\
&\cdot \lambda(T_w - T_\infty) \frac{3}{4} \sqrt[4]{h^3} \Big|_0^l = 0,269 b \sqrt[4]{\frac{\beta g (T_w - T_\infty) l^3}{\nu^2}} \lambda(T_w - T_\infty) \Rightarrow \text{число Грасгофа} \Rightarrow \\
\text{Gr}_l &= \frac{\beta g (T_w - T_\infty) l^3}{\nu^2} \Rightarrow \\
Q &= 0,269 b \sqrt[4]{\text{Gr}_l} \lambda(T_w - T_\infty). \tag{5.28}
\end{aligned}$$

Тогда среднее число Нуссельта $\Rightarrow \text{Nu}_{\text{cp}} = \frac{ql}{(T_w - T_\infty)\lambda} = \frac{Q}{lb(T_w - T_\infty)\lambda} \Rightarrow$
(5.28) \Rightarrow

$$\text{Nu}_{\text{cp}} = 0,269 \sqrt[4]{\text{Gr}_l}. \tag{5.29}$$

Соотношение (5.29) справедливо только для случая свободно-конвективного теплообмена около нагретой вертикальной пластины, находящейся в двухатомных газах, когда $\text{Pr} = 0,73$.

Аналогичные критериальные зависимости можно получить при решении других задач теплообмена. На практике широко используется формула, обобщающая экспериментальные данные для $0,5 < \text{Pr} < 10$ и $5 \cdot 10^2 < \text{Gr Pr} < 2 \cdot 10^7$:

$$\text{Nu}_{\text{cp}} = 0,54 \sqrt[4]{\text{Gr Pr}}. \tag{5.29'}$$

В случае свободной конвекции жидких металлов применяется формула:

$$\text{Nu}_{\text{cp}} = 0,53\sqrt{\text{Gr Pr}^2}. \quad (5.29'')$$

§ 14. Конвективный теплообмен при течении жидкости в круглой трубе при постоянном тепловом потоке на стенке

14.1 Задача о конвективном теплообмене при течении жидкости в круглой трубе при постоянном тепловом потоке на стенке

Рассмотрим достаточно длинную (т.е. формально бесконечную) трубу в области развитого гидродинамического течения. Изучим случай, когда на стенке трубы задана постоянная по периметру и по длине плотность теплового потока q_w (рис. 5.4).

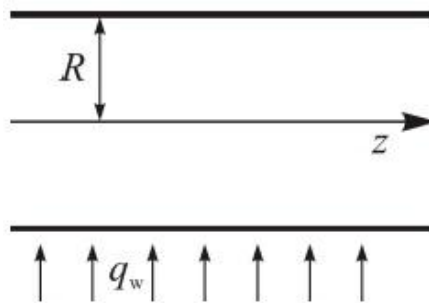


Рис. 5.4 – Геометрия задачи теплообмена в круглой трубе при постоянном тепловом потоке на стенке

Запишем уравнение конвективного теплопереноса в круглых каналах (4.39) в размерном виде:

$$2\rho c_p \bar{u} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (5.30)$$

Граничные условия в этом случае вытекают из условия постоянства плотности теплового потока на стенке (граничные условия 2-го рода) и нулевого потока на оси (следствие симметрии задачи):

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = q_w, \quad \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0. \quad (5.31)$$

$$\int_0^R (5.30) r dr \Rightarrow 2\rho c_p \bar{u} \int_0^R \frac{\partial T}{\partial z} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) r dr = \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_0^R = \lambda R \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} \Rightarrow (5.31) \Rightarrow$$

$$2\rho c_p \bar{u} \int_0^R \frac{\partial T}{\partial z} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) r dr = R q_w. \quad (5.32)$$

Введем средневзвешенную по сечению канала температуру в трубе:

$$\bar{T}(z) = \frac{2\pi \int_0^R T(r, z) u(r) r dr}{2\pi \int_0^R u(r) r dr}. \quad (5.33')$$

⇒ с учетом профиля скорости Пуазейля (2.14) и определения средней скорости ⇒ средневзвешенная по сечению канала температура в трубе ⇒

$$\bar{T}(z) = (5.33') = \frac{4\bar{u}\pi \int_0^R T(r, z) \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) r dr}{\bar{u}\pi R^2} \Rightarrow$$

$$\bar{T}(z) = \frac{4 \int_0^R T(r, z) \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) r dr}{R^2}. \quad (5.33)$$

$$\frac{d(5.33)}{dz} \Rightarrow$$

$$\frac{d\bar{T}(z)}{dz} = \frac{4}{R^2} \int_0^R \frac{\partial T(r, z)}{\partial z} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) r dr. \quad (5.33'')$$

$$(5.33'') \rightarrow (5.32) \Rightarrow 2\rho c_p \bar{u} \frac{R^2}{4} \frac{d\bar{T}}{dz} = Rq_w \Rightarrow$$

$$\frac{d\bar{T}(z)}{dz} = \frac{2q_w}{\rho c_p \bar{u} R}. \quad (5.33''')$$

$$\int_0^z (5.33''') \Rightarrow$$

$$\bar{T}(z) = Az + T_0, \quad (5.34)$$

где

$$A = \frac{2q_w}{\rho c_p \bar{u} R}, \quad (5.35)$$

а T_0 – средневзвешенная температура в трубе в нулевом сечении канала $z = 0$.