Лекция 17

17.2 Метод Рейнольдса

Методология описания турбулентных течений, суть которой заключается в представлении мгновенных значений всех гидродинамических величин (скорости, плотности, температуры и т.д.) в виде суммы осредненных (по времени или по ансамблю) и пульсационных (турбулентных) составляющих была сформулирована Рейнольдсом.

Суть метода Рейнольдса состоит в осреднении мгновенных значений пульсирующих гидродинамических параметров в пределах некоторого промежутка времени *T*. Промежуток осреднения должен удовлетворять условию $\tau_t \ll T \ll t_x$, где τ_t – период пульсаций, t_x – характерное время изменения внешних условий, определяющих нестационарность процесса. Период пульсаций τ_t можно найти из измерений частотного спектра пульсаций некоторой пульсирующей величины φ, как показано на рис. 6.3.

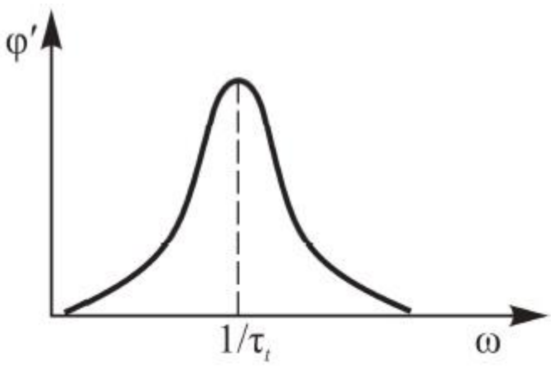

Рис. 6.3 − К определению периода пульсаций некоторой пульсирующей величины φ

В результате такого осреднения получаются либо постоянные во времени (для стационарных процессов), либо плавно меняющиеся (для нестационарных процессов) величины, в которых пульсирующая составляющая исключена.

Таким образом, для любой пульсирующей величины φ осредненное значение вычисляется как:

$$\overline{\varphi}\left(\vec{x},t\right)=\frac{1}{T}\int\limits_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}}\varphi\left(\vec{x},\tau\right)\mathrm{d}\tau\,, \qquad (6.2)$$

а пульсирующая составляющая как:

$$\varphi'\left(\vec{x},t\right)=\varphi\left(\vec{x},t\right)-\overline{\varphi}\left(\vec{x},t\right). \qquad (6.3)$$

(6.3) $\Rightarrow$ мгновенные значения любой флуктуирующей величины можно разложить на пульсационную составляющую (со штрихом) и плавно меняющуюся (с чертой):

$$\varphi\left(\vec{x},t\right)=\varphi'\left(\vec{x},t\right)+\overline{\varphi}\left(\vec{x},t\right). \qquad (6.4)$$

Операция усреднения (6.2), как следует из ее определения, является линейной и обладает следующим рядом свойствам.

1) Среднее от $\forall a = \mathrm{Const}$ равно этой константе, как очевидно следует из (6.2):

$$\overline{a} = a\,. \tag{6.5}$$

2) При повторном усреднении ничего не меняется:

$$\overline{\overline{\varphi}} = \overline{\varphi}\,. \tag{6.6}$$

Доказательство:

Из условия $T \gg t_x$ $\Rightarrow$ после усреднения (6.2) характерным временным масштабом изменения функции $\overline{\varphi}(t)$ является t_x, поэтому для моментов времени τ в интервале $t - \dfrac{T}{2} < \tau < t + \dfrac{T}{2}$ ее изменение с высокой точностью описывается линейной аппроксимацией:

$$\overline{\varphi}(\tau) = \overline{\varphi}(t) + \frac{\mathrm{d}\overline{\varphi}(t)}{\mathrm{d}t}(\tau - t)\,. \tag{6.7}$$

(6.7) вместо $\varphi(\vec{x},\tau)$ $\to$ (6.2) $\Rightarrow$ (6.6).

3) Среднее от пульсационной составляющей равно нулю:

$$\overline{\varphi'} = 0\,. \tag{6.8}$$

Доказательство:

$\overline{\varphi'} = (6.3) = \overline{\varphi - \overline{\varphi}} = \left[\text{линейность осреднения}\right] = \overline{\varphi} - \overline{\overline{\varphi}} = (6.6) = \overline{\varphi} - \overline{\varphi} = 0\,.$

4) Если ψ – это еще одна пульсирующая величина, то, как следует из линейности операции осреднения, имеет место свойство:

$$\overline{\overline{\varphi}\psi} = \overline{\varphi}\,\overline{\psi}\,. \tag{6.9}$$

5) Операции осреднения и операторы градиента и лапласиана коммутируют, что очевидно следует из (6.2):

$$\begin{gathered} \mathrm{grad}\overline{\varphi} = \overline{\mathrm{grad}\varphi} \\ \Delta\overline{\varphi} = \overline{\Delta\varphi} \end{gathered}\,. \tag{6.10}$$

6) Операции осреднения и взятия производной по времени коммутируют:

$$\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial t} = \overline{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}. \tag{6.11}$$

Доказательство:

$$\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial t} = (6.2) = \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{T}\left(\varphi\left(t + \frac{T}{2}\right) - \varphi\left(t - \frac{T}{2}\right)\right) = \frac{1}{T}\int\limits_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}}\frac{\partial\varphi(\tau)}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau = (6.2) =$$

$$= \overline{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}.$$

17.3 Уравнения Рейнольдса осредненного турбулентного течения

Рассмотрим уравнения движения для несжимаемой жидкости (1.28), (1.29):

$$\text{уравнение Навье} - \text{Стокса} \Rightarrow \rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \text{grad}\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = -\text{grad}p + \mu\Delta\vec{v}, \quad (6.12)$$

$$\text{уравнение неразрывности} \Rightarrow \text{div}\vec{v} = 0, \quad (6.13)$$

где обе переменные ($\vec{v}$ и p) являются пульсирующими величинами $\Rightarrow$ (6.4) $\Rightarrow$

$$\vec{v} = \overline{\vec{v}} + \vec{v}', \;\; p = \overline{p} + p'. \quad (6.14)$$

(6.8) $\Rightarrow$

$$\overline{\vec{v}'} = 0, \;\; \overline{p'} = 0. \quad (6.14')$$

Воспользуемся известным соотношением тензорного анализа для $\vec{v}$:

$$\text{div}\left(\vec{v}\times\vec{v}\right) = \left(\text{grad}\vec{v}\right)\vec{v} + \vec{v}\text{div}\vec{v}. \quad (6.15)$$

(6.15) $\Rightarrow$ $\left(\text{grad}\vec{v}\right)\vec{v} = \text{div}\left(\vec{v}\times\vec{v}\right) - \vec{v}\text{div}\vec{v} = (6.13) = \text{div}\left(\vec{v}\times\vec{v}\right)$ $\Rightarrow$ (6.12) $\Rightarrow$

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \text{div}\left(\vec{v}\times\vec{v}\right)\right) = -\text{grad}p + \mu\Delta\vec{v}. \quad (6.16)$$

(6.14) $\rightarrow$ (6.16) $\Rightarrow$

$$\rho\left(\frac{\partial\overline{\vec{v}}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{v}'}{\partial t} + \text{div}\left(\overline{\vec{v}}\times\overline{\vec{v}} + \vec{v}'\times\overline{\vec{v}} + \overline{\vec{v}}\times\vec{v}' + \vec{v}'\times\vec{v}'\right)\right) = \quad (6.17)$$

$$= -\text{grad}\overline{p} - \text{grad}p' + \mu\Delta\left(\overline{\vec{v}} + \vec{v}'\right)$$

Применим к уравнению (6.17) операцию осреднения (6.2) и воспользуемся свойством линейности операции осреднения и свойствами (6.6), (6.8) − (6.11) $\Rightarrow$

$$\rho\left(\frac{\partial\overline{\vec{v}}}{\partial t} + \text{div}\left(\overline{\vec{v}}\times\overline{\vec{v}} + \overline{\vec{v}'\times\vec{v}'}\right)\right) = -\text{grad}\overline{p} + \mu\Delta\overline{\vec{v}}. \quad (6.18)$$

(6.18) с учетом (6.13), (6.15) и тензорного соотношения (1.18) $\Rightarrow$

$$\rho\left(\frac{\partial\overline{\vec{v}}}{\partial t} + \left(\text{grad}\overline{\vec{v}}\right)\overline{\vec{v}}\right) = -\text{grad}\overline{p} + \text{div}\left(\mu\left(\text{grad}\overline{\vec{v}} + \left(\text{grad}\overline{\vec{v}}\right)^T\right) - \rho\overline{\vec{v}'\times\vec{v}'}\right). \quad (6.19)$$

Тензор

$$T_t = -\rho\overline{\vec{v}'\times\vec{v}'} \quad (6.20)$$

называют <u>тензором турбулентных напряжений</u>.

Рассмотрим уравнение конвективного переноса (1.25):

$$\rho c_V\left(\frac{\partial\theta}{\partial t} + \left(\text{grad}\theta\right)\vec{v}\right) = \lambda\Delta\theta - p\text{div}\vec{v} + \rho Q_V. \quad (6.21)$$

Аналогично выводу уравнения (6.19) применим операцию усреднения к уравнению конвективного переноса (6.21), считая обе переменные ($\vec{v}$ и θ) пульсирующими величинами аналогично (6.14). В результате получим уравнение переноса тепла в турбулентных течениях вида:

$$\rho c_V\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+\left(\mathrm{grad}\theta\right)\vec{v}\right)=\mathrm{div}\left(\lambda\mathrm{grad}\theta+\overline{\rho c_V\vec{v}'\theta'}\right). \tag{6.22}$$

Вектор

$$\vec{q}_t=\overline{\rho c_V\vec{v}'\theta'} \tag{6.23}$$

называют вектором турбулентного теплового потока.

Уравнения баланса импульса и баланса энергии (6.19), (6.22) называются уравнениями Рейнольдса осредненного турбулентного течения.

При этом уравнения (6.19), (6.22) являются незамкнутыми, следовательно, этот метод не позволяет получить решение той или иной задачи турбулентного переноса в рамках строгой математической постановки. В отличие от уравнений динамики вязкой жидкости, содержащих тензор вязких напряжений (1.10), который легко выражается через тензор скоростей деформаций с учетом (1.18), уравнения Рейнольдса содержат еще тензор турбулентных напряжений и вектор турбулентного теплового потока, природа и свойства которых целиком определяются характеристиками пульсационного движения.

Поэтому для описания турбулентных потоков в рамках метода Рейнольдса неизбежным этапом оказывается моделирование турбулентных напряжений и теплового потока, суть которого сводится к установлению эмпирических или полуэмпирических связей между этими величинами и осредненными характеристиками самого потока, прежде всего характеристиками поля скоростей и температуры. Такие соотношения называются моделями турбулентности.