Лекция 19

§ 19. k-ε-модели турбулентности

k-ε-модель относится к классу дифференциальных моделей турбулентности с двумя уравнениями. Это означает, что в ней строятся два дополнительных дифференциальных уравнения переноса для осредненных пульсационных характеристик, через которые затем выражается коэффициент турбулентной вязкости μ_t.

Для определения турбулентной вязкости в этой модели рассматриваются два скалярных параметра: удельная кинетическая энергия турбулентности вида (6.25):

$$k = \frac{1}{2}\overline{\vec{v}' \cdot \vec{v}'} \qquad (6.50)$$

и скорость вязкой диссипации энергии турбулентности:

$$\varepsilon = 2\nu \mathrm{tr}\left(\overline{\mathrm{grad}\vec{v}' \cdot \left(\mathrm{grad}\vec{v}'\right)^T}\right). \qquad (6.51)$$

Уравнение для кинетической энергии турбулентности можно найти с помощью последовательности действий вида: $\left((6.17)-(6.19)\right)\frac{\vec{v}'}{\rho} \Rightarrow$ после некоторых преобразований с учетом (6.50) получим:

$$\begin{gathered}\frac{\partial k}{\partial t} + \mathrm{grad}k \cdot \bar{\vec{v}} = \overline{\vec{v}' \times \vec{v}'}\mathrm{grad}\bar{\vec{v}} + \mathrm{div}\left(\nu \mathrm{grad}k - \overline{\vec{v}'\left(\frac{p'}{p} + \frac{1}{2}\vec{v}' \cdot \vec{v}'\right)}\right) - \\ -2\nu \mathrm{tr}\left(\mathrm{grad}\bar{\vec{v}}' \cdot \left(\mathrm{grad}\bar{\vec{v}}'\right)^T\right)\end{gathered}. \qquad (6.52)$$

По форме это уравнение является стандартным уравнением переноса. Рассмотрим физический смысл некоторых слагаемых, входящих в уравнение (6.52).

В уравнении (6.52):

- левая часть описывает конвективный перенос вещества (здесь это энергия турбулентности);
- в правой части:
    - первый член описывает генерацию турбулентности;
    - второй член – диффузионный перенос кинетической энергии турбулентности двух видов:
        - молекулярный (первое слагаемое в скобках);
        - турбулентный (второе слагаемое);
    - третий член описывает диссипацию кинетической энергии турбулентности.

Первый из членов в правой части (6.52) содержит тензор турбулентных напряжений (6.20), который, по гипотезе Буссинеска, выражается через осредненные характеристики потока согласно (6.24). Последний член представляет собой не что иное, как скорость вязкой диссипации энергии турбулентности (6.51).

Таким образом, неопределенным остается только член, отвечающий за турбулентную диффузию, и для замыкания уравнения (6.52) необходимо записать его через осредненные характеристики. Для этого используется гипотеза градиентной диффузии, согласно которой турбулентный диффузионный перенос кинетической энергии турбулентности выражается по аналогии с молекулярным переносом через ее градиент:

$$\vec{v}'\left(\frac{p'}{p}+\frac{1}{2}\vec{v}'\cdot\vec{v}'\right)=\frac{1}{\sigma_k}\nu_t \mathrm{grad}k\,, \qquad (6.53)$$

где ν_t − кинематический коэффициент турбулентной вязкости, σ_k − безразмерная эмпирическая константа.

(6.51), (6.53) $\rightarrow$ (6.52) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\mathrm{grad}k\cdot\bar{\vec{v}}=P_k+\mathrm{div}\left(\left(\nu+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\mathrm{grad}k\right)-\varepsilon, \qquad (6.54)$$

где

$$P_k=-T_{tr}\mathrm{grad}\bar{\vec{v}}\,, \qquad (6.55)$$

при этом $T_{tr}=\dfrac{T_t}{\rho}$ − нормированный на плотность тензор турбулентных напряжений, также равный $T_{tr}=-\overline{\vec{v}'\times\vec{v}'}$, что видно из сравнения (6.52) и (6.54). Тогда $T_{tr}=\dfrac{T_t}{\rho}=(6.24)=\dfrac{2\mu_t D-\frac{2}{3}\rho k I}{\rho}=\left[\nu_t=\dfrac{\mu_t}{\rho}\right]=2\nu_t D-\dfrac{2}{3}kI \quad\Rightarrow$ с учетом $D=\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{grad}\vec{v}+\left(\mathrm{grad}\vec{v}\right)^T\right)$ $\Rightarrow$

$$T_{tr}=\nu_t\left(\mathrm{grad}\vec{v}+\left(\mathrm{grad}\vec{v}\right)^T\right)-\frac{2}{3}kI\,. \qquad (6.56)$$

Для связи кинематического коэффициента турбулентной вязкости с осредненными параметрами модели используется соотношение, выражающее гипотезу Колмогорова – Прандтля:

$$\nu_t=C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon}, \qquad (6.57)$$

где C_μ − безразмерная эмпирическая константа.

Уравнения для скорости вязкой диссипации энергии турбулентности ε можно получить двумя способами:

1) вывести при помощи процедуры осреднения по Рейнольдсу аналогично тому, как описано выше для удельной кинетической энергии турбулентности *k*. Это уравнение будет содержать различные корреляции, которые невозможно определить через осредненные параметры потока. Естественно, в этом случае потребуются некоторые дополнительные предположения для моделирования членов полученного уравнения;

2) записать стандартную форму уравнения переноса для ε и предположить, что генерация и диссипация ε пропорциональны аналогичным величинам для k (входящим в уравнение (6.52)) с эмпирическими коэффициентами пропорциональности.

Так или иначе, оба пути приводят к уравнению, вид которого подобен виду аналогичного уравнения для k (6.54) с двумя эмпирическими константами C_1 и C_2:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \mathrm{grad}\varepsilon \cdot \bar{\bar{v}} = C_1 \frac{\varepsilon}{k} P_k + \mathrm{div}\left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\mathrm{grad}\varepsilon\right) - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k}. \tag{6.58}$$

Уравнения (6.54) – (6.58), которые надо решать совместно с осредненным по Рейнольдсу уравнением Навье – Стокса (6.19), составляют так называемую стандартную (высокорейнольдсовую) модель турбулентности Сполдинга − Лаундера. На основе калибровки констант для этой модели, выполненной по экспериментальным данным для струйных течений, приняты следующие их значения:

$$\begin{gathered}\sigma_k = 1, \ \ C_\mu = 0{,}09 \\ \sigma_\varepsilon = 1{,}3, \ \ C_1 = 1{,}44, \ \ C_2 = 1{,}92\end{gathered}. \tag{6.59}$$

Стандартная модель (как и другие высокорейнольдсовые модели) дает хорошие результаты для струйных и других свободных течений, однако плохо работает вблизи стенок, поскольку здесь локальное турбулентное число Рейнольдса Re_t мало.

Для расчета пристенных течений используются либо низкорейнольдсовые модели, либо версии k-ε-моделей, в которые введены пристенные функции, т.е. этих моделях в уравнения вводятся дополнительные функции, отвечающие за влияние стенок на турбулентность. общем случае большинство низкорейнольдсовых k-ε-моделей могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \mathrm{grad}k \cdot \bar{\bar{v}} = P_k + \mathrm{div}\left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\mathrm{grad}k\right) - \varepsilon - f_k, \tag{6.60}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \mathrm{grad}\varepsilon \cdot \bar{\bar{v}} = C_1 \frac{\varepsilon}{k} P_k + \mathrm{div}\left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\mathrm{grad}\varepsilon\right) - C_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} - f_\varepsilon, \tag{6.61}$$

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \tag{6.62}$$

Здесь введены четыре пристенные функции – f_k, f_2, f_ε и f_μ, зависящие от k и ε.

В популярной низкорейнольдсовой k-ε-модели Лаундера – Шармы эти функции задаются в форме:

$$f_k = 2\nu\left(\mathrm{grad}\sqrt{k} \cdot \mathrm{grad}\sqrt{k}\right), \tag{6.63}$$

$$f_\varepsilon = -2\nu\nu_t\left(\mathrm{grad}\left(\mathrm{grad}\bar{\bar{v}}\right) \cdot\cdot\cdot \mathrm{grad}\left(\mathrm{grad}\bar{\bar{v}}\right)\right), \tag{6.64}$$

$$f_\mu = e^{-\frac{3,4}{(1+0,02\,\mathrm{Re}_t)^2}}, \tag{6.65}$$

$$f_2 = 1 - 0,3e^{-\mathrm{Re}_t^2}. \tag{6.66}$$

Символ $\cdots$ означает скалярное произведение (свертку) тензоров третьего ранга.

Отметим, что локальное турбулентное число Рейнольдса также можно определить через величины k и ε:

$$\mathrm{Re}_t = \frac{k^2}{\nu\varepsilon}. \tag{6.67}$$

К достоинствам k-ε-моделей относится высокая точность при расчете свободных сдвиговых течений. Они достаточно универсальны и не требуют задания каких-либо дополнительных параметров. Тем не менее, трудности, связанные с их применением в пристенных областях, заставляют исследователей изобретать все новые и новые модели. Однако до настоящего времени никаких предпочтений среди моделей, базирующихся на концепции осреднения по Рейнольдсу, по существу, не наблюдается, поскольку не существует «универсальной» модели турбулентности.